Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Pep Nº 4 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Segundo semestre del 2001

(1) Considere el conjunto:

$$W = \left\{ p(t) = \sum_{s=0}^{3} a_s t^s \ \mid \ \sum_{s=0}^{3} s a_s = 0 \right\} \subset \mathbb{R}_3[t]$$

(a) Demuestre que W es un subespacio de $\mathbb{R}_3[t]$

En efecto

$$0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \Longrightarrow p(t) = 0 + 0t + 0t^2 + 0t^3 \in W$$

Entonces $W \neq \emptyset$

$$\begin{aligned}
p(t) \in W \quad &\Longleftrightarrow \quad p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathbb{R}_3[t] \quad \wedge \quad 0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathbb{R}_3[t] \quad \wedge \quad a_1 = -2a_2 - 3a_3 \\
&\Longleftrightarrow \quad p(t) = a_0 + (-2a_2 - 3a_3)t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\
&\Longleftrightarrow \quad p(t) = a_0 - 2a_2 t - 3a_3 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\
&\Longleftrightarrow \quad p(t) = a_0 + (t^2 - 2t)a_2 + (t^3 - 3t)a_3 \\
&\Longleftrightarrow \quad p(t) \in \left\langle \left\{ 1, t^2 - 2t, t^3 - 3t \right\} \right\rangle
\end{aligned}$$

Por tanto;

$$W = \left\langle \left\{ 1, t^2 - 2t, t^3 - 3t \right\} \right\rangle$$

Así que W es un subespacio de $\mathbb{R}_3[t]$

(b) Exhiba una base α de W

Claramente el conjunto $\alpha = \{1, t^2 - 2t, t^3 - 3t\}$ genera W y,

$$\begin{aligned}
c_0 + c_1(t^2 - 2t) + c_2(t^3 - 3t) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad c_0 - 2tc_1 + c_1 t^2 - 3tc_2 + c_2 t^3 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad c_0 - (2c_1 + 3c_2)t + c_1 t^2 + c_2 t^3 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad c_0 = 0 \wedge c_1 = 0 \wedge c_2 = 0
\end{aligned}$$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

De forma que α es un conjunto linealmente independiente y entonces una base de W.

(c) Determine $[1+t-\frac{1}{2}t^2]_\alpha$

Recordamos que

$$
\begin{aligned}
[1+t-\tfrac{1}{2}t^2]_\alpha = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &\iff 1+t-\tfrac{1}{2}t^2 = c_0 + c_1(t^2-2t) + c_2(t^3-3t) \\
&\iff 1+t-\tfrac{1}{2}t^2 = c_0 - (2c_1+3c_2)t + c_1t^2 + c_2t^3 \\
&\iff c_0 = 1 \wedge c_1 = -\tfrac{1}{2} \wedge c_2 = 0
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
[1+t-\tfrac{1}{2}t^2]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -\dfrac{1}{2} \\ \\ 0 \end{pmatrix}
$$

(2) Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y sea $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$. Sea $\beta = \{w_1, w_2, w_3\}$ tal que $w_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} iv_j$, para $(1 \leq i \leq 3)$

(a) Demuestre que si α es una base de V entonces β es también una base de V

En efecto

Como α es una base de V entonces basta mostrar que β es Linealmente independiente o es un sistema de generadores.

Mostraremos que β es Linealmente independiente.

Por definición los w son construidos como sigue:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= v_1 \\
w_2 &= 2v_1 + 2v_2 \\
w_3 &= 3v_1 + 3v_2 + 3v_3
\end{aligned}
$$

Así que,

$$a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 = 0 \implies a_1v_1 + a_2(2v_1 + 2v_2) + a_3(3v_1 + 3v_2 + 3v_3) = 0$$

$$\implies (a_1 + 2a_2 + 3a_3)v_1 + (2a_2 + 3a_3)v_2 + 3a_3v_3 = 0$$

Como α es base sigue la consecuencia

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1 + 2a_2 + 3a_3 & = & 0 \\ 2a_2 + 3a_3 & = & 0 \\ 3a_3 & = & 0 \end{array}\right| \implies a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Luego β es Linealmente independiente.

(b) Determine $[I]_\alpha^\beta$

Sabemos por definición que:

En primer lugar:

$$[I]_\alpha^\beta = ([v_1]_\beta \; [v_2]_\beta \; [v_3]_\beta)$$

En segundo lugar:

$$\left\{\begin{array}{rcl} w_1 & = & v_1 \\ w_2 & = & 2v_1 + 2v_2 \\ w_3 & = & 3v_1 + 3v_2 + 3v_3 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{rcl} v_1 & = & w_1 \\ v_2 & = & -w_1 + \dfrac{1}{2}w_2 \\ v_3 & = & -\dfrac{1}{2}w_2 + \dfrac{1}{3}w_3 \end{array}\right.$$

Finalmente;

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(3) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + 2y - 3z, x + y + z, x - y - z)$. Demuestre que T es un isomorfismo de $\mathbb{R}$ espacios vectoriales.

En efecto

En primer lugar debemos mostrar que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$

Sean $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T(x+a, y+b, z+c) \\
&= (x+a+2(y+b)-3(z+c), x+a+y+b+z+c, x+a-(y+b)-(z+c)) \\
&= (x+2y-3z, x+y+z, x-y-z) + (a+2b-3c, a+b+c, a-b-c) \\
&= T(x,y,z) + T(a,b,c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(\lambda u) &= T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\
&= (\lambda x + 2\lambda y - 3\lambda z, \lambda x + \lambda y + \lambda z, \lambda x - \lambda y - \lambda z) \\
&= \lambda(x+2y-3z, x+y+z, x-y-z) \\
&= \lambda T(x,y,z)
\end{aligned}$$

Luego, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$

En segundo lugar elegimos un método para mostrar que es un isomorfismo, si es que lo es?.

Elegiré el método del determinante, esto es, mostraremos que T es un isomorfismo si y sólo si $\det(T) \neq 0$

Así que;

$$[T]_{c(3)}^{c(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 10 \neq 0$$

Luego, T es un isomorfismo.

Alternativa

$$\begin{aligned}
u \in ker(T) &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge T(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff u = (x,y,z) \wedge T(x,y,z) = (0,0,0) \\
&\iff u = (x,y,z) \wedge (x+2y-3z, x+y+z, x-y-z) = (0,0,0) \\
&\iff u = (x,y,z) \wedge \left.\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow [x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0]
\end{aligned}$$

Así que $ker(T) = \{(0,0,0)\}$ y T es inyectiva, ahora aplicando el teorema de la dimensión tenemos que T es sobreyectiva y entonces T es un isomorfismo.

(4) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1))$ tal que $ker(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

Primeramente vamos a construir una base para definir la transformación lineal pedida.

Si llamamos $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ entonces α es una base de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$

Ahora define la transformación en la base α, según las condiciones pedidas:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora como α es una base entonces tenemos que para cada elemento del espacio se verifica únicamente la ecuación.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= -z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (x+z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (y+z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Downarrow \\
T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= -zT \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (x+z)T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (y+z)T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x+z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (y+z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$