

Solución Pep N° 3 de Álgebra¹
Ingeniería Civil
Segundo semestre del 2001

- (1) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
De ser verdadera, demuéstrelo, caso contrario de un contraejemplo.

- (a) Si a y b son enteros positivos y p es un primo tal que $p/(ab)$
entonces $p/a \vee p/b$

Solución:

La afirmación es VERDADERA:

Suponer que p no divide a b y probar que p/a

Como $p/ab \rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $\star ab = pk$

Por otro lado como p es primo y no divide a $b \rightarrow (p, b) = 1$ y se tiene:

$$p/(ab) \wedge (p, b) = 1 \rightarrow p/a$$

De hecho:

Como $(p, b) = 1 \rightarrow \exists x, y$ tal que $1 = px + by$

multiplicando esta ecuación por a se tiene:

$$\begin{aligned} a = 1 \cdot a &= (px + by)a = (pa)x + (ba)y = (pa)x + (pk)y = p(ax + ky) \\ &\star \\ &\rightarrow a = p(ax + ky) \rightarrow p/a \end{aligned}$$

- (b) Si A y B son matrices invertibles de orden n y tal que $A^2 = I_n$ entonces

$$(A^t B^{-1})^t = (AB^t)^{-1}$$

Solución:

La afirmación es VERDADERA:

$$\begin{aligned} (A^t B^{-1})^t &= (B^{-1})^t A \quad (\text{prop. de la traspuesta para el producto}) \\ &= (B^t)^{-1} A \quad (\text{prop. de la inversa para la traspuesta}) \\ &= (B^t)^{-1} A^{-1} \quad (\text{pues si } A^2 = I_n \text{ entonces } A = A^{-1}) \\ &= (AB^t)^{-1} (\text{prop. de la inversa para el producto}) \end{aligned}$$

¹Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

(c) Si $(a, b) = d$ entonces $\frac{a}{d}$ y $\frac{b}{d}$ son primos relativos

Solución:

La afirmación es VERDADERA:

$$\text{Si } (a, b) = d \longrightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z}, d = ax + by \longrightarrow 1 = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y$$

$$\text{Pero como } d/a \longrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}, a = dm \longrightarrow \frac{a}{d} = m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{lo mismo } d/b \longrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, b = dn \longrightarrow \frac{b}{d} = n \in \mathbb{Z}$$

y por tanto la ecuación $1 = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = mx + ny \longrightarrow (\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$ es decir son primos relativos.

(2) Si $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ entonces calcular $Re(z^{12} + \frac{1}{z})$

Solución:

$$\text{Si } z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \text{ entonces}$$

$$z = \cos(5\pi/6) + i \operatorname{sen}(5\pi/6)$$

luego

$$z^{12} = \cos(10\pi) + i \operatorname{sen}(10\pi) = 1$$

Por otro lado

$$\frac{1}{z} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$\text{(no olvide que si } z = a + bi \longrightarrow z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2} \text{)}$$

$$\longrightarrow z^{12} + \frac{1}{z} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \longrightarrow Re(z^{12} + \frac{1}{z}) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) Descomponer en fracciones parciales el cuociente $\frac{p(x)}{q(x)}$ donde:

$$p(x) = x^2 + 1 \text{ y } q(x) = x^4 + x^3 + x^2$$

Solución:

Usando fracciones parciales se tiene que:

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 + x^3 + x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} = \frac{(A + C)x^3 + (A + B + D)x^2 + (A + B)x + B}{x^2(x^2 + x + 1)}$$

Por igualdad de polinomios:

$$A + C = 0, \quad A + B + D = 1, \quad A + B = 0, \quad B = 1$$

es decir:

$$A = -1, \quad B = 1, \quad C = 1 \quad D = 1$$

Y finalmente :

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x^2 + x + 1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$$

(4) Dado el sistema

$$\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ \hline x + y + (\alpha^2 - 5)z = \alpha \end{array}$$

(a) Encuentre $S = \{ \alpha \in \mathbb{R} / \text{el sistema tenga \u00fanica soluci\u00f3n} \}$

Encuentre dicha soluci\u00f3n

Soluci\u00f3n:

Considere la matriz aumentada del sistema : (A/B)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \alpha^2 - 5 & \alpha \end{array} \right) \xrightarrow{O.E.F} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 4 & \alpha - 2 \end{array} \right)$$

el sistema tiene \u00fanica soluci\u00f3n si y s\u00f3lo si $\rho(A) = \rho(A/B) = 3$

$$\longrightarrow \alpha^2 - 4 \neq 0 \wedge \alpha - 2 \neq 0 \longrightarrow \alpha \neq 2 \wedge \alpha \neq -2$$

Por tanto $S = \{ \alpha \in \mathbb{R} / \alpha \neq 2 \wedge \alpha \neq -2 \}$

$$\text{Si } \alpha \neq 2 \wedge \alpha \neq -2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 4 & \alpha - 2 \end{array} \right) \xrightarrow{O.E.F} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha + 5}{\alpha + 2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\alpha}{\alpha + 2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha + 2} \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\alpha + 5}{\alpha + 2} \\ y = \frac{\alpha}{\alpha + 2} \\ z = \frac{1}{\alpha + 2} \end{array} \right. \quad \text{\u00fanica soluci\u00f3n del sistema}$$

(b) Encuentre $S = \{ \alpha \in \mathbb{R} / \text{el sistema no tenga solución} \}$

Solución:

Si $\alpha = -2$ el sistema no tiene solución ya que en ese caso

$$\rho(A) < \rho(A/B) \text{ de hecho:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 4 & \alpha - 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\alpha = -2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right)$$

Por tanto $S = \{ \alpha \in \mathbb{R} / \alpha = -2 \}$

(Si $\alpha = 2$ el sistema tiene infinitas soluciones ya que $\rho(A) = \rho(A/B) = 2$)