Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Pep Nº 2 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Primer semestre del 2001

(1) Sea h la altura de la torre, entonces se tiene :

En el triángulo AOC $tg(30) = \frac{h}{x}$ y en el triángulo COB $tg(60) = \frac{h}{y}$ es decir:

$$h = tg(30)x = tg(60)y$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x = \sqrt{3}y$$

$$x = 3y$$

Por otro lado el triángulo AOB es rectángulo ,de donde se tiene:

$$y^2 + x^2 = 100^2$$

$$y^2 + (3y)^2 = 100^2$$

$$y = 10\sqrt{10}$$

lo que implica $\qquad x = 30\sqrt{10}$

escogiendo cualquiera de los dos valores se tiene que:

$$h = tg(30)\ 30\sqrt{10} = tg(60)\ 10\sqrt{10} = 10\sqrt{30}$$

es decir la altura de la torre es de $10\sqrt{30}$ mts.

(2) (a) La traza de A , $tr(A)$,es la suma de los coeficientes de la diagonal, es decir:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \qquad \text{con } a_{ii} = i^3$$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(b) Supongamos que G es un grupo .

[1]Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

Entonces existe e_G , neutro en G , tal que $\forall a \in G$:

$$\begin{aligned} (a * e_G) &= a \\ (ae_G)^2 &= a \\ a^2 \cdot {e_G}^2 &= a \end{aligned}$$

de donde se tiene que : $e_G = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ (a es positivo)

es decir el neutro de G depende de a lo que es una contradiccion.

Asi G no es grupo.

(También se puede mostrar que $*$ no es asociativa en G)

(3) Sea $C = (h, k)$ el centro de la circunferencia.

Como L es tangente a la circunferencia en el punto $P(1, 2)$ entonces se tiene :

$$\begin{aligned} d(C, P) &= \sqrt{8} \\ (h-1)^2 + (k-2)^2 &= 8 \end{aligned}$$

Considere la recta L_1 que pasa por P y por el centro C , dicha recta es perpendicular a L entonces:

$$L_1 : \quad y + x - 3 = 0$$

Por tanto $h + k - 3 = 0$ es decir $k = 3 - h$. $(C \in L_1)$

y volviendo a la ecuación

$$(h-1)^2 + (k-2)^2 = 8 \qquad \text{se tiene}$$

$$(h-1)^2 + (3-h-2)^2 = 8$$

$$(h-1)^2 + (h-1)^2 = 8$$

$$2 \cdot (h-1)^2 = 8 \qquad \longrightarrow \qquad (h-1)^2 = 4$$

$$h - 1 = 2 \quad \vee \quad h - 1 = -2$$

$$(h = 3 \longrightarrow \quad k = 0) \ \vee \quad (h = -1 \longrightarrow \quad k = 4)$$

Luego el centro de la circunferencia es : $(3, 0)$, centro está en el eje X

La ecuación pedida es:

$$(x-3)^2 + y^2 = 8$$

(4) (a) Primero ver que T es un Homomorfismo.

$$
\begin{aligned}
T\left((u,v,w)+(u_0,v_0,w_0)\right) &= T(u+u_0, v+v_0, w+w_0) \\
&= (u+u_0)x^2+(w+w_0)x-(v+v_0) \\
&= (ux^2+wx-v)+(u_0x^2+w_0x-v_0) \\
&= T(u,v,w)+T(u_0,v_0,w_0)
\end{aligned}
$$

Veamos ahora que T es Inyectiva.

Analizemos el $\ker T$

$$
\begin{aligned}
\ker(T) &= \left\{(u,v,w) \ / \ T(u,v,w)=0x^2+0x+0\right\} \\
&= \left\{(u,v,w) \ / \ ux^2+wx-v=0x^2+0x+0\right\} \\
&= \{(u,v,w) \ / \ u=0, v=0, w=0\}
\end{aligned}
$$

Asi se tiene que T es inyectiva.

Y como por hipótesis T es epiyectiva se concluye que T es Biyectiva.

De todo lo anterior se tiene que T es un Isomorfismo.

(b) Como T es Biyectiva entonces:

$$T^{-1} : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{y tal que :}$$

$T^{-1}(ux^2+vx+w)=(a,b,c) \Longleftrightarrow T(a,b,c)=ux^2+vx+w.$

Pero : $T(a,b,c)=ax^2+cx-b=ux^2+vx+w$ entonces $a=u$, $c=v$, $-b=w$.

de donde se concluye:

$$T^{-1}(ux^2+vx+w)=(u,-w,v).$$

(c) Primero notar que : $(T^{-1}of) : M_{\mathbb{R}}(2) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y está definida por:

$$(T^{-1}of)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T^{-1}\left(f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = T^{-1}(bx^2+(a-c)x)=(b,0,a-c).$$

Esto muestra que no cualquier $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ tiene preimagen , basta tomar $(0,1,0)$.

Con esto se demuestra que $(T^{-1}of)$ no es epiyectiva.