Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.

Solución Pep Nº 1 de Álgebra[1]
Ingeniería Civil
Primer semestre 2001

(1) (a) Usando inducción, demostrar que:

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{4^n}$$

Demostración:

Sea $p(n) : \displaystyle\sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{4^n}$

por demostrar

$$p(1) : \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4}$$

Es claro que $p(1)$ se cumple.

Suponer que $p(k)$ verdadero , por demostrar $p(k+1)$.

$$p(k+1) : \sum_{j=1}^{2(k+1)+1} \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{4^{k+1}}$$

Dem:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2k+2} \frac{1}{2^j} &= \sum_{j=1}^{2k} \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{2^{2k+2}} \\
&= 1 - \frac{1}{4^k} + \frac{1}{2^{2k+1}} + \frac{1}{2^{2k+2}} \\
&= 1 - \frac{1}{4^k} + \frac{1}{2 \cdot 4^k} + \frac{1}{4 \cdot 4^k} \\
&= 1 + \frac{1}{4^k}(-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \\
&= 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^k}
\end{aligned}$$

Asi $p(k+1)$ se cumple , y $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ es verdadero.

(b) Usando el teorema del binomio se tiene que:

$$(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4})^{11} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} (x\sqrt{x})^{11-k} (\frac{1}{x^4})^k = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} x^{\frac{11}{2}(k-3)}$$

Asi el término independiente de x se obtiene cuando $\displaystyle\frac{11}{2}(k-3) = 0$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

es decir cuando $k = 3$ y es igual a: $\binom{11}{3}$

(2) (a) R es refleja. $(a, b)R(a, b) \Longleftrightarrow b - b = 2(a - a)$

R es simétrica. Suponga que $(a, b)R(c, d)$,entonces se cumple que:
$d - b = 2(c - a)$ y ahora multiplique por -1 y se obtiene $b - d = 2(a - c)$
es decir, $(c, d)R(a, b)$.

R es transitiva. Si $(a, b)R(c, d)$ y $(c, d)R(e, f)$ entonces se tiene:

$$d - b = 2(c - a) \quad \text{y} \quad f - d = 2(e - d)$$

Ahora basta sumar ambas ecuaciones y se obtiene:
$f - b = 2(e - a)$ es decir $(a, b)R(e, f)$

(b) $(\bar{1,2}) = \{(a, b)/(a, b)R(1, 2)\} = \{(a, b)/2 - b = 2(1 - a)\} = \{(a, b)/b = 2a\}$
Es decir; $(\bar{1,2}) = \{(a, 2a)/a \in \mathbb{R}\}$

(3) Como A es una P.A entonces se tiene:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n} = \frac{2n}{2}(2a_1 + (2n - 1)d)$$

Pero:
$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n} = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}) + (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n})$
es decir

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n} = 24 + 30 = 54$$

Por lo que:

$$\frac{2n}{2}(2a_1 + (2n - 1)d) = 54$$

$$\frac{2n}{2}(a_1 + a_1 + (2n - 1)d) = 54$$

$$\frac{2n}{2}(a_1 + a_{2n}) = 54 \qquad \text{(ya que } a_1 + (2n - 1)d = a_{2n})$$

Y como

$$a_{2n} = a_1 + \frac{21}{2} \quad \text{y} \quad a_1 = \frac{3}{2}$$

entonces reemplazando en la última ecuación se tiene:

$$n(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{21}{2}) = 54 \qquad \text{de donde} \quad n = 4$$

y con esto se concluye que la P.A tiene 8 términos.