

Solución PAS de Álgebra¹
Ingeniería Civil
Primer semestre del 2001

(1) (a) Demostrar que:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$$

Demostración:

Se sabe que:

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ \longrightarrow \sin^2(\theta) &= \cos^2(\theta) - \cos(2\theta) \\ &= 1 - \sin^2(\theta) - \cos(2\theta) \\ \longrightarrow 2\sin^2(\theta) &= 1 - \cos(2\theta) \\ \longrightarrow \sin^2(\theta) &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \end{aligned}$$

Haga $\theta = \frac{\alpha}{2}$ y en ese caso se tiene:

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$$

(b) Determine la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y que pasa por el punto $P = (1, \sqrt{3})$

Solución:

Sea r el radio de la circunferencia que tiene centro en el origen entonces la ecuación de dicha circunferencia es de la forma:

$$\S \quad x^2 + y^2 = r^2$$

Por otro lado como el punto $P = (1, \sqrt{3})$ pertenece a la circunferencia entonces P satisface la ecuación $\S$ es decir se cumple:

$$1^2 + \sqrt{3}^2 = r^2 \longrightarrow r = 2$$

Luego la ecuación pedida es:

$$x^2 + y^2 = 4$$

(2) Sean R_1, R_2 dos relaciones de orden definidas en los conjuntos A y B respectivamente.

¹Cada problema vale 1.5 puntos.
Tiempo 120'

Se define en $A \times B$ la relación R como sigue:

$$(a, b)R(c, d) \iff a R_1 c \wedge b R_2 d$$

Demostrar que R también es relación de orden.

Demostración:

Debemos probar que R es refleja, antisimétrica y transitiva.

refleja:

$$(a, b)R(a, b), \forall (a, b) \in A \times B \text{ ya que:}$$

$$a R_1 a, \forall a \in A \text{ y } b R_2 b, \forall b \in B, \text{ por ser } R_1 \text{ y } R_2 \text{ relaciones reflejas}$$

antisimétrica:

Suponer que :

$$\begin{array}{ccc} (a, b)R(c, d) & \wedge & (c, d)R(a, b) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ a R_1 c \wedge b R_2 d & \wedge & c R_1 a \wedge d R_2 b \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ a R_1 c \wedge c R_1 a & \wedge & b R_2 d \wedge d R_2 b \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ a = c & \wedge & b = d \end{array} \quad (R_1, R_2 \text{ son antis.})$$

Luego se tiene: $(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(a, b) \implies (a, b) = (c, d)$, es decir R es antisimétrica.

transitiva:

Suponer que :

$$\begin{array}{ccc} (a, b)R(c, d) & \wedge & (c, d)R(e, f) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ a R_1 c \wedge b R_2 d & \wedge & c R_1 e \wedge d R_2 f \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ a R_1 c \wedge c R_1 e & \wedge & b R_2 d \wedge d R_2 f \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ a R_1 e & \wedge & b R_2 f \end{array} \quad (R_1, R_2 \text{ son transit.})$$

$$\Downarrow$$

$$(a, b)R(e, f)$$

Así se tiene: $(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f) \implies (a, b)R(e, f)$ con lo que se prueba que R es transitiva.

De todo lo anterior se concluye que R es una relación de orden.

(3) Sea $T : (M_{\mathbb{R}}(n), +) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ una función, tal que: $T(A) = tr(A)$

(a) Demostrar que T es un Homomorfismo.

Demostración:

Sean A y B matrices en $M_{\mathbb{R}}(n)$, entonces:

$$\begin{aligned} T(A + B) &= tr(A + B) \\ &= tr(A) + tr(B) \quad (\text{la traza es aditiva}) \\ &= T(A) + T(B) \end{aligned}$$

(b) Demuestre que T es sobreyectivo.

Demostración:

Considere la matriz $A = (a_{ij})$ de orden n y tal que:

$$a_{nn} = x - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{n-1n-1}) \implies tr(A) = x$$

Luego $\forall x \in \mathbb{R}, \exists A \in M_{\mathbb{R}}(n) / T(A) = x$

(c) Determine $ket(T)$

Solución:

$$\begin{aligned} Ker(T) &= \{A \in M_{\mathbb{R}}(n) / T(A) = 0\} \\ &= \{A \in M_{\mathbb{R}}(n) / tr(A) = 0\} \\ &= \{A \in M_{\mathbb{R}}(n) / a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 0\} \end{aligned}$$

Es claro que T no es 1-1. Contraejemplo : basta tomar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \implies tr(A) = 0 \text{ y } tr(B) = 0$$

(4) Usando inducción, demostrar que:

$$\sum_{k=1}^n (k^2 + 1)k! = n(n+1)!$$

Demostración:

Sea

$$p(n) : \sum_{k=1}^n (k^2 + 1)k! = n(n+1)!$$

i)

$$\begin{array}{ccc} p(1) : \sum_{k=1}^1 (k^2 + 1)k! & = & 1(1+1)! \\ \downarrow & & \downarrow \\ (1^2 + 1)1! & = & 1(1+1)! \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2 & = & 2 \end{array}$$

por tanto $p(1)$ es una proposición verdadera.

ii) Ahora suponer $p(n)$ verdadera.

Por demostrar :

$$p(n+1) : \sum_{k=1}^{n+1} (k^2 + 1)k! = (n+1)(n+2)!$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (k^2 + 1)k! &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 1)k! + ((n+1)^2 + 1)(n+1)! \\ &= n(n+1)! + ((n+1)^2 + 1)(n+1)! \\ &= (n+1)!(n + n^2 + 2n + 2) \\ &= (n+1)!(n^2 + 3n + 2) \\ &= (n+1)(n+2)! \end{aligned}$$

Así se tiene que $p(n+1)$ es verdadera y portanto $\forall n \in \mathbb{N}$ $p(n)$ es verdadera.