Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y C.C.

Guía Adicional Preparando la PEP 4 de Álgebra

Profesor Coordinador Ricardo Santander B.
Colaboran Profesores:Luis Arancibia, Emilia Castro, Lila Narea,Julián Cortés, Luis Riquelme,Luis Riveros,José Peña

Noviembre de 2007

La matemática viene impresa en el cerebro y,
sólo se hace carne cuando palpita en el corazón.

1. Objetivo de la guía

Estimados estudiantes, les proponemos estos ejercicios con el objetivo de que a través del trabajo que significa analizarlos, comprenderlos y finalmente resolverlos, consigan en el más breve plazo, desarrollar competencias adecuadas que les permitan aplicar estos conocimientos en situaciones nuevas.

2. Algunas sugerencias

(1) Lea cuidadosamente el problema

(2) Reconozca lo que es información, de lo que es "incognita", o lo que a usted se le consulta y debe hacer.

(3) Gestione de forma eficiente la información

3. Ejercicios: Espacios vectoriales

(1) Si $\mathbb{S} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) | A = A^t\}$ y $\mathbb{T} = \{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) | A = -A^t\}$ entonces muestre que

  (a) $\mathbb{S} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ y $\mathbb{T} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$, y

  (b) $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n) = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$

(2) Sean $\mathbb{W} = \{(x,\ y,\ z,\ w) \in \mathbb{R}^4 / x - 2y + z = w\}$ y $\mathbb{U} = \{(x,\ y,\ z,\ w) \in \mathbb{R}^4 / z = 0,\ y + w = x\}$

  (a) Muestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^4$ y $\mathbb{U} \leq \mathbb{R}^4$.

  (b) Determine $\dim_{\mathbb{R}}(W \cap U)$.

(3) Si $\mathbb{W} = \langle\{(1,\ 1,\ 0), (1,\ 0,\ 2)\}\rangle$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a + b,\ 3a + 2b,\ a) \in \mathbb{W}\}$$

(4) Si $\mathbb{U} = \langle\{(1,\,5,\,6),\ (1,\,-4,\,-3)\}\rangle$ y $\mathbb{T} = \langle\{(2,\,1,\,0)\}\rangle$, son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$. Pruebe que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{U} \oplus \mathbb{T}$

(5) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$.

(a) Demuestre que

$$T^k(v) = 0 \wedge T^{k-1}(v) \neq 0,\ k \in \mathbb{N} \implies A = \{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{k-1}(v)\} \text{ es linealmente independiente}$$

(b) Demuestre que $\ker(T^i) \subset \ker(T^{i+1})$

(c) Demuestre que $T(\ker(T^{i+1})) \subset \ker(T^i)$

(6) Si $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una $\mathbb{K}$ base $\mathbb{V}$. Determine si, es posible que $\beta = \{v_1 + 2v_2, v_1 - 3v_3, v_1 - 2v_2 + 3v_3\}$ sea también una base de $\mathbb{V}$

(7) Sean $S = \{\operatorname{sen}^2 x,\ \cos^2 x,\ \operatorname{sen} x \cos x\}$ y $T = \{1,\ sen\,2x,\ cos\,2x\}$. Demuestre que $\langle S\rangle = \langle T\rangle$

(8) Para cada uno de los casos, β es una base ordenada y v es un vector. Determine $[v]_\beta$ e $[I]_{c(3)}^{\beta}$.

(a) $\beta = \{(1,\,-1,\,1),\ (0,\,2,\,-1),\ (-2,\,0,\,3)\}$ y $v = (-4,\,5,\,1)$

(b) $\beta = \{t^2 + 3t - 2,\ 2t^2 + t,\ 4t + 5\}$ y $v = 4t^2 - 5t + 3$

(c) $\beta = \{t + 1,\ -3t^3 + 2t - 1,\ 3t^3 - t^2 + t,\ -2t^3 + t^2\}$ y $v = 5t^3 - 2t^2 + t - 3$

(9) Determine una base y la dimensión del subespacio de soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones $(*)$

$$\left.\begin{array}{ccccc} x_1 + & 2x_2 + & 3x_3 + & 4x_4 & = 0 \\ \frac{x_1}{2} + & x_2 + & \frac{3x_3}{2} + & 2x_4 & = 0 \\ \frac{x_1}{3} + & \frac{2x_2}{3} + & x_3 + & \frac{4x_4}{3} & = 0 \\ \frac{x_1}{4} + & \frac{x_2}{2} + & \frac{3x_3}{4} + & x_4 & = 0 \end{array}\right| \qquad (*)$$

4. Ejercicios: Producto Interno

(1) Demuestre que en $\mathbb{R}^2$

$$\langle (u_1,\,u_2), (v_1, v_2)\rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2$$

Es un producto interior.

(2) Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces demuestre que

$$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

Es un producto interno.

(3) Sean f y g dos funciones continuas de variable real definidas en un espacio vectorial $C[a,\, b]$.

Demuestre que $\langle f,\, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ define un producto interno sobre $C[a,\, b]$

(4) Sean $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^n$ dos vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}_n[x]$, el producto interior $\langle p,\, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots a_nb_n$. Con ello obtenga para $p(x) = 1 - 2x^2 + 5x^3$ y $q(x) = 4 - 2x + x^2 - x^3$
(a) $\langle p,\, q \rangle$
(b) $||q||$
(c) $d(p, q)$
(d) $||p|| + ||q||$
(e) $||p + q||$

(5) Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que
$G((m,\, n),\, (u,\, v)) = mu + \dfrac{mu + nv}{2} + nv$
Verifique si G es un producto interno.

(6) V es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial con producto interno. Sea $\{v, w\}$ un conjunto ortogonal de vectores unitarios.

(a) Pruebe que el conjunto $U = \{2v + 2w,\, v - w\}$ es un conjunto ortogonal

(b) Calcule $d(v,\, \langle U \rangle)$

(7) Si V es un espacio vectorial con producto interno y $W \leq V$, entonces demuestre que:

(a) $W \cap W^{\perp} = \{0\}$
(b) $W \oplus W^{\perp} = V$
(c) $(W^{\perp})^{\perp} = W$

(8) Considere el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & & & 7x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \end{array}\right|$

Obtenga para el subespacio de sus soluciones una base ortogonal

5. Ejercicios: Transformaciones Lineales

(1) Sea $T : M_{\mathbb{R}}(3) \to M_{\mathbb{R}}(3)$ tal que $T(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot A$. Determine si T corresponde a una transformación lineal

¿Será una biyección? Justifique.

(2) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que
$T(x, y) = (x, y, x + y)$

(a) Determine una base para $Ker(T)$

(b) Obtenga $dim(Im(T))$

(c) ¿Es T un isomorfismo? Justifique.

(3) Sea $V \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(2)$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Se define $T : V \to V$ como $T(A) = AM - MA$

(a) Obtenga $Ker(T)$ y una base que lo genere

(b) Obtenga $Im(T)$

(4) Se sabe que $F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y + z \end{pmatrix}$ y $G = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.
Obtener, si es posible

(a) $F \circ G$

(b) $G \circ F$

(5) Si $T \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ entonces

(a) Determine T, y

(b) Calcule $T \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

(6) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $\beta = \{(1, -1, 0),\ (-1, 1, -1),\ (1, 0, 0)\}$

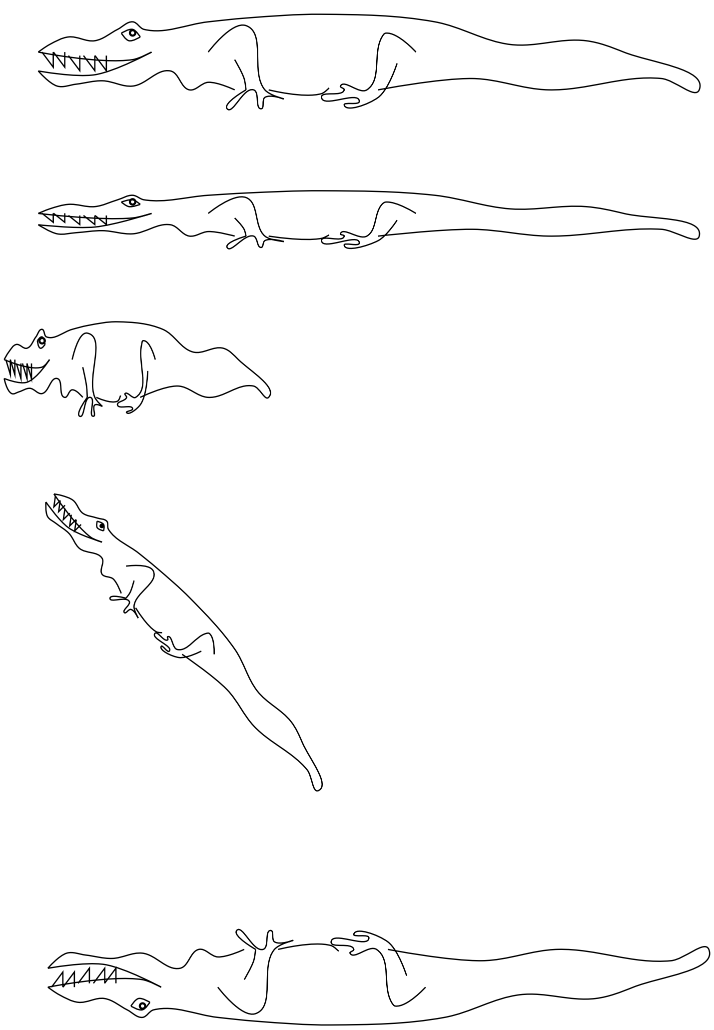
(a) Demuestre que $T \circ T = T$

(b) Obtenga una base $\gamma = \{w_1, w_2, w_3\}$, con la cual $[T]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Determine $Im(T)$ y $Ker(T)$

(7) Sea V un espacio vectorial con producto interno, $W \leq V$, $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base ortonormal de W. Considere $T : V \to W$ definida por $T(v) = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \langle v, v_n \rangle v_n$. Demuestre que T es una transformación lineal.

(8) La siguiente representación corresponde a una figura y cuatro transformaciones



Explique en forma intuitiva como se generan dichas transformaciones.

6. Ejercicios: Diagonalización

(1) Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$, tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_0x + a_2x^2$ entonces

(a) Determine valores y vectores propios de T

(b) ¿T es un isomorfismo ?

(2) Sea $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $\det(A) \neq 0$.

- Demuestre que A diagonalizable $\Longrightarrow A^{-1}$ diagonalizable
- Si A diagonalizable. Determine los subespacios propios de A^{-1}

(3) Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que $T(A) = A^t$ entonces

(a) Determine valores propios de T

(b) ¿Es T diagonalizable?. Justifique completamente su respuesta.

(4) Determine (si es posible) $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$ tal que verifique simultáneamente las condiciones:

(a) $(\mathbb{R}_2[x])_{-1} = \langle\{1 - x\}\rangle$

(b) $(\mathbb{R}_2[x])_1 = \left\langle\left\{1 + x, x^2\right\}\right\rangle$

(5) Si $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$, tal que $T(x, y) = (x + y, ay)$. Determine el conjunto

$$D = \{a \in \mathbb{R} \mid T \text{ es diagonalizable}\}$$

(6) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ c & 3 \end{pmatrix}$. Determine el conjunto:

$$S = \{c \in \mathbb{R} \mid A \text{ es diagonalizable}\}$$

(7) Determine $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tal que verifique simultáneamente las condiciones:

(a) $(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))_4 = \left\{A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A = A^t\right\}$, donde A^t es la matriz traspuesta de la matriz A.

(b) T no es un isomorfismo.

(8) Si $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ tal que $f(x, y) = (x - y, x + y)$ y $g \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ tal que $g(x, y) = (x + 2y, x - 3y)$.

(a) Determine los valores propios de $T = g \circ f$, donde $(g \circ f)(u) = g(f(u))$ para $(\forall u; u \in \mathbb{R}^2)$

(b) ¿T es diagonalizable?

(9) Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, tal que $T(x, y, z) = (2x - 2y, 0, 2x - 2y)$. Demuestre que T es diagonalizable

(10) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. Demuestre que

$$T \text{ no sobreyectiva } \Longleftrightarrow \mathbb{V}_0 \neq \{0_{\mathbb{V}}\}$$

7. Ejercicios: Ejercicios Misceláneos

(1) Considere el subespacio $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$, determine $P_{\mathbb{W}}$.

(2) Si $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + z - 2t = 0\} \leq \mathbb{R}^4$ entonces

(a) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(b) Determine $P_{\mathbb{W}}$

(c) Calcule $d((x, y, z), \mathbb{W})$

(3) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n.

(a) Demuestre que $\langle u, v\rangle = 0_{\mathbb{K}} \quad (\forall v, v \in \mathbb{V}) \Longrightarrow u = 0_{\mathbb{V}}$

(b) Demuestre que $\langle u - v, w\rangle = 0_{\mathbb{V}} \quad (\forall w, w \in \mathbb{V}) \Longrightarrow u = v$

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ de dimensión n, y $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$.

(a) Demuestre que $P_{\mathbb{W}}(w) = w \Longrightarrow w \in \mathbb{W}$

(b) Demuestre que $P_{\mathbb{W}}$ inyectiva $\Longrightarrow \mathbb{V} = \mathbb{W}$

(5) Sea $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \wedge z - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ entonces usando el producto interno usual de $\mathbb{R}^3$

(a) Determine $\mathbb{W}^{\perp}$

(b) ¿ Es $\mathbb{R}^3 = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$?

(6) En el espacio vectorial $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ define el producto interno. $\langle A, B\rangle = Tr(B^t A)$. Determine una base ortonormal para el subespacio $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}\mathbb{R}(2) \mid A = A^t\}$.

(7) sea $T \in \text{Ł}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z, x + y + z)$. Usando el producto interno usual determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u, v\rangle = 0 \quad (\forall v; v \in ker(T))\}$$

(8) Si $(V, \langle , \rangle)$ es un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial entonces demuestre que

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}[\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2]$$

BUEN TRABAJO !!!