Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Una solución de la Pep 2
Profesores: Inge Alicera, Patricia Castro,
Francisco Castillo y Ricardo Santander Baeza
9 de Julio del 2012

(1) Sea $\mathbb{W}=\{A=(a_{ij})\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\mid a_{12}-a_{21}=0\}$. Si definimos en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ la relación

$$A\,\Re\,B\Longleftrightarrow (A-B)\in\mathbb{W}$$

Entonces demuestre que

(a) $\Re$ es una relación de equivalencia

En efecto. Definiremos para usar a través de esta esta demostración

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$$

entonces "una alternativa es operacionalizar la definición de $\Re$" como sigue:

$$\begin{aligned} A\,\Re\,B &\Longleftrightarrow (A-B)\in\mathbb{W}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{W}\Longleftrightarrow(a_{12}-b_{12})-(a_{21}-b_{21})=0\\ &\Longleftrightarrow (a_{12}-b_{12})=(a_{21}-b_{21})\end{aligned}$$

Así por ejemplo, con esta nueva mirada tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\Re\begin{pmatrix} 20 & 6\\ 7 & 12\end{pmatrix}$$

$$\text{Pues }\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 20 & 6\\ 7 & 12\end{pmatrix}\in\mathbb{W},\ \text{ya que } 2-6=3-7$$

En fin, vamos a la verificación pedida:

(i) $(\forall A; A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2))$ tenemos que $a_{12}-a_{21}=a_{12}-a_{21}$ luego

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\Re\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

Y $\Re$ es una relación reflexiva.

Ahora, para estudiar la reflexividad, aplicamos la definición y obtenemos.

$$\begin{aligned} A\,\Re\,B &\Longleftrightarrow (a_{12}-b_{12})=(a_{21}-b_{21})\Longrightarrow -(a_{12}-b_{12})=-(a_{21}-b_{21})\\ &\Longrightarrow (b_{12}-a_{12})=(b_{21}-a_{21})\Longrightarrow B\,\Re\,A\end{aligned}$$

Y $\Re$ es una relación simétrica.
Para estudiar la transitividad , procedemos conforme al protocolo usual:

$$\begin{aligned} A\,\Re\,B\wedge B\,\Re\,C &\Longleftrightarrow (a_{12}-b_{12})=(a_{21}-b_{21})\wedge(b_{12}-c_{12})=(b_{21}-c_{21})\\ &\Longrightarrow (a_{12}-b_{12})+(b_{12}-c_{12})=(a_{21}-b_{21})+(b_{21}-c_{21})\\ &\Longrightarrow (a_{12}-c_{12})=(a_{21}-c_{21})\Longrightarrow A\,\Re\,C\end{aligned}$$

Y $\Re$ es una relación transitiva, y conjuntando la información, sigue que $\Re$ es una relación de equivalencia.

(b) $\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}=\mathbb{W}$

En efecto, aquí aplicamos directamente la definición de clase de equivalencia,

$$\begin{aligned} A\in\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}} &\Longleftrightarrow A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge A\Re\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge a_{12}-1=a_{21}-1\\ &\Longleftrightarrow A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge a_{12}=a_{21}\Longleftrightarrow A\in\mathbb{W}\end{aligned}$$

Luego, $\overline{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}=\mathbb{W}$

[1]Cada problema vale 2 puntos
Tiempo 100'

(2) Dada la función $f:\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z)=(x+y-(2\lambda-1)z, x+y+z, y-z)$. Determine el conjunto

$$\mathbb{B}=\{\lambda\in\mathbb{R} \mid f \text{ no inyectiva}\}$$

En este caso, iniciamos el análisis observando lo siguiente

$$\begin{aligned}
\lambda\in\mathbb{B} &\iff \lambda\in\mathbb{R} \ \wedge \ f \text{ no inyectiva}\\
&\iff \lambda\in\mathbb{R} \ \wedge \ (\exists u; u\in\mathbb{R}^3);(\exists v; v\in\mathbb{R}^3): u\neq v \wedge f(u)=f(v) \quad (*)
\end{aligned}$$

Con la idea expresada en $(*)$ estudiamos la inyectividad de la función f, y para ello usemos la definición funcional.

$$\begin{aligned}
f(u)=f(v) &\iff f(x_1,y_1,z_1)=f(x_2,y_2,z_2)\\
&\iff (x_1+y_1-(2\lambda-1)z_1, x_1+y_1+z_1, y_1-z_1)=(x_2+y_2-(2\lambda-1)z_2, x_2+y_2+z_2, y_2-z_2)\\
&\iff \left.\begin{array}{clcl}
(1) & x_1+y_1-(2\lambda-1)z_1 & = & x_2+y_2-(2\lambda-1)z_2\\
(2) & x_1+y_1+z_1 & = & x_2+y_2+z_2\\
(3) & y_1-z_1 & = & y_2-z_2
\end{array}\right|\\
&\overset{(2)-(1)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{lcl}
z_1+(2\lambda-1)z_1 & = & z_2+(2\lambda-1)z_2\\
y_1-z_1 & = & y_2-z_2
\end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl}
2\lambda z_1 & = & 2\lambda z_2\\
y_1-z_1 & = & y_2-z_2
\end{array}\right|\\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl}
2\lambda(z_1-z_2) & = & 0\\
y_1-z_1 & = & y_2-z_2
\end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl}
2\lambda=0 & \vee & (z_1-z_2)=0\\
y_1-z_1 & = & y_2-z_2
\end{array}\right|
\end{aligned}$$

Si Luego, $\lambda=0$ entonces z_1 puede ser perfectamente distinta de z_2 y en tal caso f no es inyectiva, además en tal caso $f(x,y,z)=(x+y+z, x+y+z, y-z)$ y por ejemplo $f(0,0,0)=(0,0,0)$ y $f(-2,1,1)=(0,0,0)$, más general $f(-2z,z,z)=(0,0,0)$, $(\forall z, z\in\mathbb{R})$, en fin, conclusión

$$\mathbb{B}=\{0\}$$

(3) Si definimos la función $f:\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\longmapsto\mathbb{R}^4$ tal que

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=(a_{11}+2a_{12}+3a_{21}, a_{12}-a_{21}+a_{22}, a_{21}, a_{22}-a_{21})$$

Entonces

(a) Demuestre que f es un isomorfismo

Para mostrar que f es un isomorfismo "**debemos mostrar que f es un homomorfismo biyectivo**" y en ese contexto partimos mostrando que f es un homomorfismo.

Por tanto si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ Y $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces

$$\begin{aligned}
f(A+B) &= f\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}\\
&= (a_{11}+b_{11}+2(a_{12}+b_{12})+3(a_{21}+b_{21}), a_{12}+b_{12}-(a_{21}+b_{21})+a_{22}+b_{22}, a_{21}+b_{21}, a_{22}+b_{22}-(a_{21}+b_{21}))\\
&= (a_{11}+b_{11}+2a_{12}+2b_{12}+3a_{21}+3b_{21}, a_{12}+b_{12}-a_{21}-b_{21}+a_{22}+b_{22}, a_{21}+b_{21}, a_{22}+b_{22}-a_{21}-b_{21})\\
&= (a_{11}+2a_{12}+3a_{21}, a_{12}-a_{21}+a_{22}, a_{21}, a_{22}-a_{21})+(b_{11}+2b_{12}+3b_{21}, b_{12}-b_{21}+b_{22}, b_{21}, b_{22}-b_{21})\\
&= f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\\
&= f(A)+f(B)
\end{aligned}$$

Luego, f es un homomorfismo

Ahora, para estudiar su inyectividad hacemos uso de su núcleo, e.e.

$$\begin{aligned}
A\in\ker(f) &\iff A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge f(A)=0_{\mathbb{R}^4}\\
&\iff A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=(0,0,0,0)\\
&\iff A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge (a_{11}+2a_{12}+3a_{21},a_{12}-a_{21}+a_{22},a_{21},a_{22}-a_{21})=(0,0,0,0)\\
&\iff A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge \left.\begin{array}{lcl} a_{11}+2a_{12}+3a_{21} & = & 0\\ a_{12}-a_{21}+a_{22} & = & 0\\ a_{21} & = & 0\\ a_{22}-a_{21} & = & 0\end{array}\right|\\
&\iff A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge a_{21}=a_{22}=a_{12}=a_{11}=0\\
&\iff A=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego

$$\ker(f)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\text{ y } f \text{ es inyectiva}$$

Para estudiar su sobreyectividad comparamos los conjuntos $\mathbb{R}^4$ e Img (f), al respecto sabemos que por el hecho de f ser una función entonces Img $(f)\subset\mathbb{R}^4$, así que falta investigar la relación $\mathbb{R}^4\subset$ Img (f). Por tanto pesquisamos la solución de la ecuación en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, $f(A)=u$ para $u\in\mathbb{R}^4$ dado.

$$\begin{aligned}
f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=(a,b,c,d) &\iff (a_{11}+2a_{12}+3a_{21},a_{12}-a_{21}+a_{22},a_{21},a_{22}-a_{21})=(a,b,c,d)\\
&\iff \left.\begin{array}{lcl} a_{11}+2a_{12}+3a_{21} & = & a\\ a_{12}-a_{21}+a_{22} & = & b\\ a_{21} & = & c\\ a_{22}-a_{21} & = & d\end{array}\right|\\
&\implies \left.\begin{array}{lcl} a_{11} & = & a-2b+2d-3c\\ a_{12} & = & b-d\\ a_{21} & = & c\\ a_{22} & = & d+c\end{array}\right|
\end{aligned}$$

Así que

$$f\begin{pmatrix} (a-2b+2d-3c) & (b-d)\\ c & d+c\end{pmatrix}=(a,b,c,d)\text{ y }\mathbb{R}^4\subset\text{Img }(f)\text{ por tanto } f \text{ es sobreyectiva}$$

Conclusión f es un isomorfismo.

(b) Determine f^{-1}

Usando la información anterior obtenemos que f^{-1} existe y es definida omo sigue:

$$f^{-1}:\mathbb{R}^4\longmapsto\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\text{ tal que } f(a,b,c,d)\begin{pmatrix} (a-2b+2d-3c) & (b-d)\\ c & d+c\end{pmatrix}$$