Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Una Solución para la Pep 1
Profesor Ricardo Santander Baeza
28 de Mayo del 2012

(1) Si Definimos el conéctivo lógico # como sigue: Para p y q dos proposiciones $p \# q$ será verdadero si p verdadera y q falsa, y en cualquier otro caso $p \# q$ es falsa entonces determine el valor de verdad de la proposición lógica.

$$\sim (p\#q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)$$

Solución: Sabemos que "el conectivo doble implicación $\Longleftrightarrow$ es verdadero si las proposiciones que conecta, ambas son verdaderas o ambas son falsas, y es falso en cualquier otro caso" entonces iniciamos el análisis motivados por esta idea.

(a) $\sim (p\#q)$ **verdadera.**

En este caso $p\#q$ es falsa entonces según la propia definición de #, tenemos los siguientes casos:

- p verdadera y q verdadera entonces $(\sim p \vee q)$ es verdadera, pues q es verdadera.
- p falsa y q verdadera entonces $(\sim p \vee q)$ es verdadera, pues p y q son verdadera.
- p falsa y q falsa entonces $(\sim p \vee q)$ es verdadera, pues p es verdadera.

Conclusión en este caso $(\sim p \vee q)$ **es verdadera**

(b) $\sim (p\#q)$ **falsa.**

En este caso $p\#q$ es verdadera entonces según la propia definición de #, tenemos que p es verdadera y q es falsa. Así que $\sim p \vee q$ es falsa, pues $\sim p$ y q son falsas.

Conclusión en este caso $(\sim p \vee q)$ **es falsa**. Conclusión general $\sim (p\#q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)$ es siempre verdadera

Si usa tabla entonces tendrá lo siguiente:

p	q	$\sim p$	$p\#q$	$\sim (p\#q)$	$\Longleftrightarrow$	$\sim p \vee q$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1

Conclusión:$\sim (p\#q)$ **es verdadera**

(2) Demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula proposicional

$$F(n):\ \sum_{i=1}^{n} i\cdot 2^{i-1} = 1+(n-1)2^n \text{ es verdadera } (\forall n; n\in\mathbb{N}).$$

En efecto:

- Para $n = 1$ tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{1} i\cdot 2^{i-1} & = & 1\cdot 2^{1-1} = 1\cdot 2^0 = 1 \\ & & \wedge \\ 1+(1-1)2^1 & = & 1+0\cdot 2 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{1} i\cdot 2^{i-1} = 1+(1-1)2^1 \Longrightarrow F(1) \text{ es verdadera}$$

[1]Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

- Supongamos que $F(n)$ es verdadera, es decir que

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^{i-1} = 1 + (n-1)2^n \qquad (H)$$

- Por demostrar que $F(n+1)$ es verdadera, e.e. P.d.q.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^{i-1} = 1 + ((n+1)-1)2^{n+1} = 1 + n\; 2^{n+1}$$

Entonces en la especie tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^{i-1} &= \sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^{i-1} + (n+1) \cdot 2^{n+1-1} \\
&\overset{(H)}{=} 1 + (n-1)2^n + (n+1)2^n \\
&= 1 + n\; 2^n - 2^n + n\; 2^n + 2^n \\
&= 1 + 2n\; 2^n \\
&= 1 + n\; 2^{n+1}
\end{aligned}$$

Luego, $F(n+1)$ es verdadera, y $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

(3) Si $A = \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^+$, o sea a, b y c son números reales positivos, y $G = \left\{\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}\right\}$ entonces demuestre que

$$G \text{ Es una Progresión Aritmética} \Longrightarrow A \text{ Es una Progresión Geométrica}$$

Solución: Conforme a nuestras definiciones tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
G \text{ Es una Progresión Aritmética} &\iff \frac{1}{2b} - \frac{1}{a+b} = \frac{1}{b+c} - \frac{1}{2b} \\
&\iff \frac{a+b-2b}{2b(a+b)} = \frac{2b-(b+c)}{2b(b+c)} \\
&\iff \frac{a-b}{2b(a+b)} = \frac{b-c}{2b(b+c)} \\
&\iff (a-b)(b+c) = (a+b)(b-c) \\
&\iff ab + ac - b^2 - bc = ab - ac + b^2 - bc \\
&\iff 2b^2 = 2ac \\
&\iff \frac{b}{a} = \frac{c}{b}
\end{aligned}$$

Luego, A es una Progresión Geométrica

(4) Demuestre que

$$2 + \sum_{n=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right) = 2^{m+1}$$

En efecto. Por el Teorema del Binomio tenemos que

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Longrightarrow 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right) &= \sum_{n=1}^{m} 2^n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^m = 2(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2m - 1) = 2\left(\frac{2^m - 1}{2-1}\right) \\
&= 2^{m+1} - 2
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
2 + \sum_{n=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right) &= 2 + 2^{m+1} - 2 \\
&= 2^{m+1}
\end{aligned}$$