

- (1) Determine el coeficiente de x^5 para el desarrollo:

$$(x+1)(1+x+x^2)^n$$

Solución, como

$$(x+1)(1+x+x^2)^n = (x+1)(1+x(x+1))^n$$

entonces

$$\begin{aligned} (x+1)(1+x+x^2)^n &= (x+1)(1+x(x+1))^n \\ &= (x+1) \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (1)^{1-k} x^k (x+1)^k \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k (x+1)^{k+1} \end{aligned}$$

Por tanto, los casos a estudiar son: $k=5$, $k=4$, $k=3$, $k=2$ puesto que estos casos entregan la potencia requerida. Si $k=5$ el producto $x^k(x+1)^{k+1}$ es:

$$x^5(x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1)$$

luego el escalar del termino de grado 5 es 1 al cual hay que multiplicarle $\binom{n}{5}$

Si $k=4$ en el desarrollo de $x^4(x+1)^{4+1}$ se tiene el escalar del termino de grado 5 es 5 al cual hay que multiplicarle $\binom{n}{4}$

Si $k=3$ en el desarrollo de $x^3(x+1)^{3+1}$ se tiene el escalar del termino de grado 5 es 6 al cual hay que multiplicarle $\binom{n}{3}$

Si $k=2$ en el desarrollo de $x^2(x+1)^{2+1}$ se tiene el escalar del termino de grado 5 es 1 al cual hay que multiplicarle $\binom{n}{2}$

Así solo basta sumar $\left\{ \binom{n}{5} + 5 \binom{n}{4} + 6 \binom{n}{3} + \binom{n}{2} \right\}$

- (2) Intercalar dos números reales entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{9}{4}$ de modo que los tres primeros términos formen una P.A. y los tres últimos formen una P.G.

Solución: Tenemos:

$$\left\{ \frac{1}{2}, a, b, \frac{9}{4} \right\}$$

De los primeros tres términos tenemos la relación: $a - \frac{1}{2} = b - a$ despejamos b en términos de a y obtenemos la ecuación: $b = 2a - \frac{1}{2}$ (1)

De igual forma de los tres últimos tenemos: $b^2 = \frac{9}{4}a$ reemplazamos b en esta última ecuación y obtenemos

$\frac{9}{4}a = (2a - \frac{1}{2})^2$ Esta es una ecuación cuadrática de soluciones:

$$\left\{ 1, \frac{1}{16} \right\}$$

Y por último reemplazamos en la ecuación (1) para obtener para $a = 1$; $b = \frac{3}{2}$, y para $a = \frac{1}{16}$; $b = -\frac{3}{8}$

- (3) Considere el grupo de las matrices reales de 2×2 , que tienen inversa, denotada por M_I :

$$M_I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / ad - bc \neq 0 \right\}$$

Considere la relación R definida en M_I , como:

$$\forall A, B \in M_I : ARB \Leftrightarrow \exists X \in M_I, A = BX$$

- a) Demuestre que R es una relación de equivalencia.
b) Determine la clase de equivalencia de la matriz identidad:

Solución.

a) Sea $A \in M_I$, entonces, siempre se cumple: $A = AI$, donde I es la matriz identidad, que es invertible, por lo que R es reflejo.

Sean A y B dos matrices en M_I , supongamos que ARB , es decir, $A = BX$, con X invertible. Luego existe X^{-1} que es invertible, por lo que se tiene:

$$B = AX^{-1}$$

es decir, BRA , es decir R es simétrica.

Sean A, B, C , matrices en M_I , tales que se cumple: $ARB \wedge BRC$, es decir:

$$A = BX, \quad X \in M_I \quad \wedge \quad B = CX', \quad X' \in M_I$$

de donde:

$$A = CX'X$$

pero se cumple que: $\det(X'X) = \det(X')\det(X) \neq 0$, es decir: $X'X \in M_I$, por lo cual ARC , lo que demuestra que R es transitiva y por tanto con lo anterior es una relación de equivalencia.

- b) La clase de la matriz identidad:

$$\bar{I} = \{A \in M_I \mid A = IX, X \in M_I\} = M_I$$

- (4) Para la función $f : (M_{2 \times 2}, +) \mapsto (R^2, +)$, definida por:

$$f \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = (a - d, b - c)$$

- a) Demuestre que f es un homomorfismo de grupos.

- b) Demuestre que:

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in R \right\}$$

Sean :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

dos matrices cualesquiera:

$$\begin{aligned} f \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) &= f \left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \right) = (a+a' - (d+d'), b+b' - (c+c')) = \\ &= (a-d, b-c) + (a'-d', b'-c') = f \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) + f \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

lo que demuestra que f es un homomorfismo de grupos.

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid f \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = (0, 0) \right\}$$

resolviendo el sistema, obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\} \end{aligned}$$