

Álgebra¹ - Una Solución de la Pep 4
Profesor Ricardo Santander Baeza
6 de Febrero del 2012

[1] Si $\mathbb{W} = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid a_{11} - 3a_{12} + a_{21} - 2a_{22} = 0 \wedge a_{11} + a_{22} = 0\}$ entonces

[a] Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, es decir $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$

Solución: Usamos la técnica que determina un sistema de generadores para $\mathbb{W}$, por tanto procedemos como sigue:

$$\begin{aligned}
 A \in \mathbb{W} &\iff A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a_{11} - 3a_{12} + a_{21} - 2a_{22} = 0 \wedge a_{11} + a_{22} = 0 \\
 &\iff A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a_{11} - 3a_{12} + a_{21} - 2a_{22} = 0 \wedge a_{22} = -a_{11} \\
 &\iff A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a_{11} - 3a_{12} + a_{21} - 2(-a_{11}) = 0 \wedge a_{22} = -a_{11} \\
 &\iff A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a_{11} - 3a_{12} + a_{21} + 2a_{11} = 0 \wedge a_{22} = -a_{11} \\
 &\iff A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge 3a_{11} - 3a_{12} + a_{21} = 0 \wedge a_{22} = -a_{11} \\
 &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a_{21} = -3a_{11} + 3a_{12} \wedge a_{22} = -a_{11} \\
 &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -3a_{11} + 3a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} : a_{11} \in \mathbb{R} \wedge a_{12} \in \mathbb{R} \\
 &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ -3a_{11} & -a_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 3a_{12} & 0 \end{pmatrix} : a_{11} \in \mathbb{R} \wedge a_{12} \in \mathbb{R} \\
 &\iff A = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} : a_{11} \in \mathbb{R} \wedge a_{12} \in \mathbb{R} \\
 &\iff A \in \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$$

[b] Determine una base $\mathbb{W}$

Solución: Del punto anterior tenemos que $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un sistema de generadores para $\mathbb{W}$. Por tanto para que α sea una base es necesario que también sea un conjunto linealmente independiente, y para testear esto, procedemos como la rutina acostumbrada.

$$\begin{aligned}
 c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\implies \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -3c_1 + 3c_2 & -c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\implies c_1 = 0 \wedge c_2 = 0
 \end{aligned}$$

Luego, α es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{W}$ y por ende una base del mismo.

¹Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

- [2] Sea $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto linealmente independiente del espacio vectorial real $\mathbb{V}$. Si definimos el conjunto $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ tal que $w_j = \sum_{i=1}^j \lambda v_i$, para $1 \leq j \leq n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, fijo. Determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \beta \text{ es linealmente independiente}\}$$

Solución: El punto aquí es determinar el conjunto $\mathbb{S}$, y para ello debemos conocer las características de los elementos de él. Así que

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{S} &\iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge \beta \text{ es linealmente independiente} \\ &\iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge [c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_n = 0_{\mathbb{V}} \implies c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0] \quad (*) \end{aligned}$$

Luego, la condición $(*)$ es la que debe ser analizada en profundidad.

En primer lugar observamos que

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda v_1 \\ w_2 &= \lambda v_1 + \lambda v_2 \\ &\vdots \\ w_n &= \lambda v_1 + \lambda v_2 + \dots + \lambda v_n \end{aligned}$$

En segundo lugar, con el resultado obtenido encima podemos escribir:

$$\begin{aligned} c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_n w_n = 0_{\mathbb{V}} &\iff c_1 \lambda v_1 + c_2 (\lambda v_1 + \lambda v_2) + \dots + c_n (\lambda v_1 + \lambda v_2 + \dots + \lambda v_n) = 0_{\mathbb{V}} \\ &\iff (c_1 \lambda + c_2 \lambda + \dots + c_n \lambda) v_1 + (c_2 \lambda + c_3 \lambda + \dots + c_n \lambda) v_2 + \dots + \\ &\quad (c_{n-1} \lambda + c_n \lambda) v_{n-1} + c_n \lambda v_n = 0_{\mathbb{V}} \\ &\implies \left. \begin{array}{l} c_1 \lambda + c_2 \lambda + \dots + c_n \lambda \\ c_2 \lambda + c_3 \lambda + \dots + c_n \lambda \\ \vdots \\ c_{n-1} \lambda + c_n \lambda \\ c_n \lambda \end{array} \right\} \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ \vdots \\ = 0 \\ = 0 \end{array} \quad (**) \end{aligned}$$

En tercer lugar, observamos que $(**)$ se verifica porque α es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{V}$ y además del análisis de las ecuaciones del sistema, **para que se verifique $(*)$** sigue que

$$\lambda \neq 0 \wedge c_n = c_{n-1} = \dots = c_1 = 0$$

Conclusión: $\mathbb{S} = \mathbb{R} - \{0\}$

- [3] Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial tal que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}) = 3$, y $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{V}$. Demuestre que

$$\alpha \text{ linealmente independiente en } \mathbb{V} \implies \alpha \text{ es una base de } \mathbb{V}$$

Solución:

- [a] Como sabemos, un conjunto de vectores es una base si es simultáneamente un sistema de generadores, y linealmente independiente
- [b] En este caso, como α es por hipótesis linealmente independiente entonces sólo resta mostrar que α es un sistema de generadores, es decir **para cada vector** $v \in \mathbb{V}$ **existen escalares** c_1, c_2, c_3 **tales que** $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$
- [c] Ahora, si $u \in \mathbb{V}$ es cualquier vector entonces $\beta = \{v_1, v_2, v_3, u\}$ es un conjunto linealmente dependiente, caso contrario $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}) > 3$, por tanto, existen escalares a_1, a_2, a_3, a_4 **no todos nulos** tales que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 u = 0_{\mathbb{V}} \iff a_4 u = -a_1 v_1 - a_2 v_2 - a_3 v_3$$

[d] Si $a_4 = 0$ entonces $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0_{\mathbb{V}}$ y, α no es linealmente independiente, contrariando la hipótesis.

Así que $a_4 \neq 0$ y

$$\begin{aligned} u &= \frac{-a_1v_1 - a_2v_2 - a_3v_3}{a_4} \\ &= \left(-\frac{a_1}{a_4}\right)v_1 + \left(-\frac{a_2}{a_4}\right)v_2 + \left(-\frac{a_3}{a_4}\right)v_3 \\ &= c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 \quad \left(\text{donde, } c_i = \left(-\frac{a_i}{a_4}\right); i = 1, 2, 3\right) \end{aligned}$$

Conclusión: Si α es un conjunto linealmente independiente y $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}) = 3$ entonces α es un sistema de generadores y entonces una base.

[4] Si $\mathbb{W} = \{(x, y, z, t) \mid x + 2y - z = 0\} \leq \mathbb{R}^4$ entonces respecto del producto interno usual de $\mathbb{R}^4$ determine,

[a] Una base ortogonal de $\mathbb{W}$

Solución: En primer lugar, determinamos una base para $\mathbb{W}$, y para ello usamos "la técnica de los generadores". e.e.

$$\begin{aligned} u \in \mathbb{W} &\iff u = (x, y, z, t) \wedge x + 2y - z = 0 \\ &\iff u = (x, y, z, t) \wedge x + 2y = z \\ &\iff u = (x, y, x + 2y, t) \quad (x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \\ &\iff u = (x, 0, x, 0) + (0, y, 2y, 0) + (0, 0, 0, t) \\ &\iff u = x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, 2, 0) + t(0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Luego $\mathbb{W} = \langle \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 1)\} \rangle$ y $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}) \leq 3$. Pero

$$x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, 2, 0) + t(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \implies (x, y, x + 2y, t) = (0, 0, 0, 0) \implies x = y = t = 0$$

Así que, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}) = 3$ y $\alpha = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{W}$

En segundo lugar, observamos que α no es una base ortogonal, pues

$$\begin{aligned} \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 0) \rangle &= 2 \\ \langle (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle &= 0 \\ \langle (0, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Así que aplicamos el proceso de Jorgen Pedersen Gram y Erhard Schmidt, o mejor conocido como proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, para obtener una base ortogonal, a partir de la base α , y en consecuencia, sea

$$\begin{aligned} u'_1 &= (1, 0, 1, 0) \\ u'_2 &= (0, 1, 2, 0) - \frac{\langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 2, 0) \rangle}{\langle (1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0) \rangle} (1, 0, 1, 0) = (0, 1, 2, 0) - \frac{2}{2}(1, 0, 1, 0) = (-1, 1, 1, 0) \\ u'_3 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Luego, una base ortogonal para $\mathbb{W}$ es

$$\alpha' = \{(1, 0, 1, 0), (-1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

Ya que,

$$\begin{aligned} \langle (1, 0, 1, 0), (-1, 1, 1, 0) \rangle &= 0 \\ \langle (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle &= 0 \\ \langle (-1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

[b] La proyección ortogonal, $P_{\mathbb{W}}$ de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{W}$

Solución: Usando la base α' , definimos la proyección ortogonal, como de costumbre, e.e.

$$P_{\mathbb{W}} : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{W}$$

Tal que

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{W}}(x, y, z, t) &= \left(\frac{\langle (x, y, z, t), (1, 0, 1, 0) \rangle}{\langle (1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0) \rangle} \right) (1, 0, 1, 0) + \left(\frac{\langle (x, y, z, t), (-1, 1, 1, 0) \rangle}{\langle (-1, 1, 1, 0), (-1, 1, 1, 0) \rangle} \right) (-1, 1, 1, 0) + \\ &\quad \left(\frac{\langle (x, y, z, t), (0, 0, 0, 1) \rangle}{\langle (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1) \rangle} \right) (0, 0, 0, 1) \\ &= \left(\frac{x+z}{2} \right) (1, 0, 1, 0) + \left(\frac{-x+y+z}{3} \right) (-1, 1, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1) \\ &= \left(\frac{x+z}{2} + \frac{x-y-z}{3}, \frac{-x+y+z}{3}, \frac{x+z}{2} + \frac{-x+y+z}{3}, t \right) \\ &= \left(\frac{3x+3z+2x-2y-2z}{6}, \frac{-x+y+z}{3}, \frac{3x+3z-2x+2y+2z}{6}, t \right) \\ &= \left(\frac{5x-2y+z}{6}, \frac{-x+y+z}{3}, \frac{x+2y+5z}{6}, t \right) \end{aligned}$$

Ahora, verificamos la eficacia de nuestro trabajo, usando la propiedad $P_{\mathbb{W}}(u) = u \iff u \in \mathbb{W}$.

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{W}}(1, 0, 1, 0) &= \left(\frac{5+1}{6}, \frac{-1+1}{3}, \frac{1+5}{6}, 0 \right) = (1, 0, 1, 0) \quad \text{OK} \\ P_{\mathbb{W}}(-1, 1, 1, 0) &= \left(\frac{-5-2+1}{6}, \frac{1+1+1}{3}, \frac{-1+2+5}{6}, 0 \right) = (-1, 1, 1, 0) \quad \text{OK} \\ P_{\mathbb{W}}(0, 0, 0, 1) &= \left(\frac{0}{6}, \frac{0}{3}, \frac{0}{6}, 1 \right) = (0, 0, 0, 1) \quad \text{OK} \end{aligned}$$

[c] La distancia de $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ a $\mathbb{W}$, es decir $d((x, y, z, t), \mathbb{W})$

Solución: Aplicamos directamente la definición, y obtenemos que

$$\begin{aligned} d((x, y, z, t), \mathbb{W}) &= \|(x, y, z, t) - P_{\mathbb{W}}(x, y, z, t)\| \\ &= \left\| (x, y, z, t) - \left(\frac{5x-2y+z}{6}, \frac{-x+y+z}{3}, \frac{x+2y+5z}{6}, t \right) \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{6x-5x+2y-z}{6}, \frac{3y+x-y-z}{3}, \frac{6z-x-2y-5z}{6}, 0 \right) \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{x+2y-z}{6}, \frac{x+2y-z}{3}, \frac{-x-2y+z}{6}, 0 \right) \right\| \\ &= \left\| (x+2y-z) \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, 0 \right) \right\| \\ &= \left\| \frac{(x+2y-z)}{6} (1, 2, -1, 0) \right\| \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6} |x+2y-z| \end{aligned}$$

Finalmente comprobamos usando la propiedad $d((x, y, z, t), \mathbb{W}) = 0 \iff u \in \mathbb{W}$. Lo que en este caso es claro, porque la condición para que $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{W}$ es justamente que $x+2y-z=0$