Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Pep 3
Profesor Ricardo Santander Baeza
16 de Enero del 2012

[1] Si $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \neq 0$ y

$$A = \begin{pmatrix} c+1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & c+2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & c+3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & c+4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$$

entonces determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{c \in \mathbb{R} \mid A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

Solución

En primer lugar entramos al conjunto.

$$c \in \mathbb{S} \Longleftrightarrow c \in \mathbb{R} \ \wedge \ A \in \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \Longleftrightarrow c \in \mathbb{R} \ \wedge \ \det(A) \neq 0$$

Ahora, se ve natural que debemos determinar el $\det(A)$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det \begin{pmatrix} c+1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & c+2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & c+3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & c+4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (l_1 \to l_1 - l_4) \\ (l_2 \to l_2 - l_4) \\ (l_3 \to l_3 - l_4) \end{matrix} = \det \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & -c \\ 0 & c & 0 & -c \\ 0 & 0 & c & -c \\ 1 & 2 & 3 & c+4 \end{pmatrix} \ (l_1 \to l_1 - cl_4) \\
&= \det \begin{pmatrix} 0 & -2c & -3c & -c-c^2-4c \\ 0 & c & 0 & -c \\ 0 & 0 & c & -c \\ 1 & 2 & 3 & c+4 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -2c & -3c & -c^2-5c \\ c & 0 & -c \\ 0 & c & -c \end{pmatrix} \ (l_1 \to l_1 + 2l_2) \\
&= -\det \begin{pmatrix} 0 & -3c & -c^2-7c \\ c & 0 & -c \\ 0 & c & -c \end{pmatrix} = c \det \begin{pmatrix} -3c & -c^2-7c \\ c & -c \end{pmatrix} = c(3c^2 - c(-c^2-7c)) \\
&= c^3(c+10)
\end{aligned}$$

Así que concluimos que $\det(A) = 0 \Longleftrightarrow c = 0 \vee c = -10$. Finalmente

$$\mathbb{S} \ = \ \mathbb{R} - \{0, -10\}$$

[2] Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(r)$ con $r \geq 2$ entonces demuestre que

$$(\det(A) = d \quad \wedge \quad d \neq 0) \Longrightarrow \det(\text{Adj }(A)) = d^{r-1} \qquad \text{1.0 Punto}$$

Solución

Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(r)$ entonces sabemos que

$$A \cdot Adj(A) = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix}$$

[1] Tiempo 120'

Luego

$$\det(A\cdot \mathrm{Adj(A)}) = d^r$$

Además como

$$\det(A\cdot \mathrm{Adj(A)}) = \det(A)\cdot \det(\mathrm{Adj(A)} = d\cdot \det(\mathrm{Adj(A)}$$

y $d\neq 0$ entonces sigue que

$$d\cdot \det(\mathrm{Adj(A)}) = d^r \Longrightarrow \det(\mathrm{Adj(A)}) = d^{-1}\cdot d^r = d^{r-1}$$

[3] Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x & - & 10y & = & a & - & b & & \\ x & + & 2y & = & a & + & b & - & 1 \\ 2x & + & y & = & a & & & & \\ x & + & y & = & b & & & & \end{array}\right| \qquad (*) \qquad\qquad 2.0 \text{ Punto}$$

Determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{(a,b)\in \mathbb{R}^2 \mid (*) \text{ tiene solución única}\}$$

Solución

Etapa 1. Escalonamos $(A|B)$, para aplicar el teorema del rango al sistema $(\star)$

$$\left[\begin{array}{rr|l} 5 & -10 & a-b \\ 1 & 2 & a+b-1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \end{array}\right] \begin{array}{l} (l_1\to l_1-5l_4) \\ (l_2\to l_2-l_4) \\ (l_3\to l_2-2l_4) \end{array} \left[\begin{array}{rr|r} 0 & -15 & a-6b \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2b \\ 1 & 1 & b \end{array}\right] \quad (l_1\leftrightarrow l_4)$$

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2b \\ 0 & -15 & a-6b \end{array}\right] \begin{array}{l} (l_1\to l_1-l_2) \\ (l_3\to l_3+l_2) \\ (l_4\to l_4+15l_2) \end{array} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & b-a+1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 2a-2b-1 \\ 0 & 0 & 16a-6b-15 \end{array}\right]$$

Etapa 2. aplicamos el teorema del rango, y $(\star)$ tiene solución si:

$$\left.\begin{array}{rcr} 2a-2b & = & 1 \\ 16a-6b & = & 15 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcr} 6a-6b & = & 3 \\ 16a-6b & = & 15 \end{array}\right| \Longrightarrow a=\frac{6}{5}\wedge b=\frac{7}{10}$$

Luego,

$$S = \left\{\left(\frac{6}{5},\frac{7}{10}\right)\right\}$$

[4] Si α una raíz cúbica de la unidad, es decir, $\alpha^3=1$ y $\alpha\neq 1$ entonces demuestre que

$$(1+\alpha)(\alpha-\alpha^2)(1+3\alpha)(4\alpha-\alpha^2) = 21 \qquad\qquad 1.0 \text{ Punto}$$

Solución

P.d.q. $(1+\alpha)(\alpha-\alpha^2)(1+3\alpha)(4\alpha-\alpha^2)=21$

Ahora gestionamos la información como sigue:

[a] Si α es una raíz cúbica de la unidad y $\alpha\neq 1$ entonces $1+\alpha+\alpha^2=0$

[b] Usando esta información procedemos a calcular lo pedido.

$$\begin{aligned}
(1+\alpha)(\alpha-\alpha^2)(1+3\alpha)(4\alpha-\alpha^2) &= (-\alpha^2)\cdot(\alpha-\alpha^2)\cdot(2\alpha-\alpha^2)\cdot(4\alpha-\alpha^2); \quad (\text{Pues, } 1+\alpha=-\alpha^2)\\
&= (-\alpha^2)\cdot\alpha(1-\alpha)\cdot\alpha\cdot(2-\alpha)\cdot\alpha\cdot(4-\alpha)\\
&= (-\alpha^2)(1-\alpha)\cdot(2-\alpha)\cdot(4-\alpha)\cdot\alpha^3\\
&= (-\alpha^2)(1-\alpha)\cdot(2-\alpha)\cdot(4-\alpha); \qquad (\text{ Pues, } \alpha^3=1)\\
&= (-\alpha^2+\alpha^3)\cdot(2-\alpha)\cdot(4-\alpha)\\
&= (1-\alpha^2)\cdot(2-\alpha)\cdot(4-\alpha)\\
&= (2+\alpha)\cdot(2-\alpha)\cdot(4-\alpha)\\
&= (4-\alpha^2)\cdot(4-\alpha)\\
&= (5+\alpha)\cdot(4-\alpha)\\
&= 20-5\alpha+4\alpha-\alpha^2\\
&= 20-\alpha-\alpha^2\\
&= 20+1; \qquad (\text{Pues, } -\alpha-\alpha^2=1)\\
&= 21
\end{aligned}$$

[c] Finalmente, concluimos que $(1+\alpha)(\alpha-\alpha^2)(1+3\alpha)(4\alpha-\alpha^2)=21$