Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución de la Pep 2
Profesor Ricardo Santander Baeza
19 de Diciembre del 2011

[1] Si $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_R(3\times 1) \mid x+y-z=0 \right\}$, y definimos en $\mathbb{M}_R(3\times 1)$ la relación

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Re \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ y_1-y_2 \\ z_1-z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$$

entonces demuestre que

[a] $\Re$ es una relación de equivalencia

Solución.
Debemos mostrar que $\Re$ es una relación de equivalencia, es decir que es una relación Reflexiva, simétrica y transitiva entonces propongo el siguiente camino para conseguir el objetivo:

[i] Podemos observar que de la definición de $\Re$ sigue que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Re \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} x_1-x_2 \\ y_1-y_2 \\ z_1-z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W} \\ &\iff x_1-x_2+y_1-y_2-(z_1-z_2)=0 \\ &\iff x_1-x_2+y_1-y_2-z_1+z_2=0 \\ &\iff x_1+y_1-z_1=x_2+y_2-z_2 \end{aligned}$$

Así que la conclusión de este análisis es que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Re \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \iff x_1+y_1-z_1=x_2+y_2-z_2 \tag{1}$$

[ii] Para ver que $\Re$ es reflexiva observamos que $\left(\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)\right)$

$$x+y-z=x+y-z \overset{(1)}{\iff} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Re \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Luego, $\Re$ es una relación reflexiva

[iii] Para ver que $\Re$ es una relación simétrica observamos que de (1), sigue que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Re \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1+y_1-z_1=x_2+y_2-z_2 \Rightarrow x_2+y_2-z_2=x_1+y_1-z_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Re \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $\Re$ es una relación simétrica

[1] Tiempo 120'

[iv] Finalmente para verificar que la relación $\Re$ es transitiva, vemos que si

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Re \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \Re \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} & \iff x_1 + y_1 - z_1 = x_2 + y_2 - z_2 \wedge x_2 + y_2 - z_2 = x_3 + y_3 - z_3 \\
& \Longrightarrow x_1 + y_1 - z_1 = x_3 + y_3 - z_3 \\
& \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \Re \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por tanto, $\Re$ es una relación transitiva, y después de los resultados anteriores tenemos que $\Re$ es una relación de equivalencia.

[b] $\mathbb{W} = \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$, donde $\overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ es la clase de equivalencia de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

En efecto

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} & \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1) \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Re \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1) \wedge x + y - z = 0 + 0 - 0 \\
& \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1) \wedge x + y - z = 0 \\
& \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{W}
\end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{W} = \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

[2] Si $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (2x + 3y, \lambda x + y + 1)$ entonces determine el conjunto

$$S = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid f \text{ es una función inyectiva}\}$$

Solución: Procedemos de la forma natural con la que se analiza a los elementos de un conjunto, e.e.

$$\begin{aligned}
\lambda \in S & \iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge f \text{ es una función inyectiva} \\
& \iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge [f(a, b) = f(c, d) \Longrightarrow (a, b) = (c, d)] \ (\textbf{Observen que } f \textbf{ no es homomorfismo de grupos}) \\
& \iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge [(2a + 3b, \lambda a + b + 1) = (2c + 3d, \lambda c + d + 1) \Longrightarrow (a, b) = (c, d)] \\
& \iff \lambda \in \mathbb{R} \wedge \left[\underbrace{\left. \begin{array}{rcl} 2a + 3b & = & 2c + 3d \\ \lambda a + b + 1 & = & \lambda c + d + 1 \end{array} \right| \Longrightarrow (a, b) = (c, d)}_{\textbf{Esta es la condición a estudiar}} \right] \qquad (*)
\end{aligned}$$

Entonces estudiemos el problema descrito en $(*)$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2a+3b & = & 2c+3d \\ \lambda a+b+1 & = & \lambda c+d+1 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 2a+3b & = & 2c+3d \\ \lambda a+b & = & \lambda c+d \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{lrcl} (1) & 2a+3b & = & 2c+3d \\ (2) & 3\lambda a+3b & = & 3\lambda c+3d \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{rl} \stackrel{(2)-(1)}{\Longrightarrow} & 3\lambda a-2a+0b=3\lambda c-2c+0d \Longrightarrow a(3\lambda-2)=c(3\lambda-2) \\ \Longrightarrow & (a-c)(3\lambda-2)=0 \Longrightarrow (a-c)=0 \vee (3\lambda-2)=0 \\ \Longrightarrow & a=c \vee \lambda=\dfrac{2}{3} \end{array}$$

Por tanto, para que $a=c$ en forma indeclinable debe cumplirse que $\lambda \neq \frac{2}{3}$, y en tal caso sustituyendo en (1) tenemos que también se verifica que $b=d$ y f es inyectiva

Luego de $(*)$, sigue que

$$S = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid f \text{ es una función inyectiva}\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

Como siempre podemos comprobar nuestro resultado, observando que si $\lambda = \frac{2}{3}$ entonces nuestras ecuaciones centrales (1) y (2) se transforman en

$$\left.\begin{array}{lrcl} (1) & 2a+3b & = & 2c+3d \\ (2) & 2a+3b & = & 2c+3d \end{array}\right| \text{ (Infinitas soluciones para el sistema)}$$

[3] Sea $T : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a-b+2c \\ a-b+c & c+d \end{pmatrix}$.

[a] Demuestre que T es un isomorfismo de grupos

En efecto:

[i] Mostramos que T es un homomorfismo de grupos.(esto es esencial en la definición de isomorfismo)
Para ello comenzamos escogiendo $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ para mostrar que

$$T(A+B) = T(A)+T(B)$$

En consecuencia.

$$\begin{array}{rcl} A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) & \Longleftrightarrow & A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \\ B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) & \Longleftrightarrow & B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned} T(A+B) &= T\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2) & (a_1+a_2-(b_1+b_2)+2(c_1+c_2)) \\ (a_1+a_2-(b_1+b_2)+c_1+c_2) & (c_1+c_2+d_1+d_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2) & (a_1+a_2-b_1-b_2+2c_1+2c_2) \\ (a_1+a_2-b_1-b_2+c_1+c_2) & (c_1+c_2+d_1+d_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1+b_1+c_1+a_2+b_2+c_2) & (a_1-b_1+2c_1+a_2-b_2+2c_2) \\ (a_1-b_1+c_1+a_2-b_2+c_2) & (c_1+d_1+c_2+d_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1+b_1+c_1) & (a_1-b_1+2c_1) \\ (a_1-b_1+c_1) & (c_1+d_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (a_2+b_2+c_2) & (a_2-b_2+2c_2) \\ (a_2-b_2+c_2) & (c_2+d_2) \end{pmatrix} \\ &= T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \\ &= T(A)+T(B) \end{aligned}$$

Así que T es un homomorfismo.

[ii] Estudiemos su inyectividad, a través de su núcleo.

$$\begin{aligned}
A\in\ker(T) &\iff A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\quad\wedge\quad T(A)=0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}\\
&\iff \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\quad\wedge\quad T\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\quad\wedge\quad \begin{pmatrix} a+b+c & a-b+2c\\ a-b+c & c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\quad\wedge\quad \left.\begin{array}{lll}(1)\ a+b+c &=& 0\\ (2)\ a-b+2c &=& 0\\ (3)\ a-b+c &=& 0\\ (4)\ c+d &=& 0\end{array}\right|\quad(*)
\end{aligned}$$

Ahora estudiemos el sistema planteado en $(*)$

$$\left.\begin{array}{lll}(1)\ a+b+c &=& 0\\ (2)\ a-b+2c &=& 0\\ (3)\ a-b+c &=& 0\\ (4)\ c+d &=& 0\end{array}\right|\ \left.\begin{array}{l}\overset{(2)-(3)}{\Longrightarrow}\ c=0\\ \overset{(4)}{\Longrightarrow}\ d=0\end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{lll}(5)\ a+b &=& 0\\ (6)\ a-b &=& 0\end{array}\right|\ \begin{array}{l}\overset{(5)+(6)}{\Longrightarrow}\ a=0\\ \overset{(5)-(6)}{\Longrightarrow}\ b=0\end{array}$$

Conclusión de este ítem: de $(*)$ sigue que

$$A\in\ker(T)\iff a=b=c=d=0$$

Luego

$$\ker(T)\ =\ \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\quad(\text{ y en consecuencia } T \text{ es inyectiva})$$

[iii] Estudiemos su inyectividad, a través de su Imagen. Sabemos que

$$T\text{ Sobreyectiva}\iff \text{Img }(T)=\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\iff \text{Img }(T)\subset\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\wedge\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\subset\text{Img }(T)\qquad(*)$$

Como T es una función entonces se verifica naturalmente que Img $(T)\subset\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$, así que sólo resta mostrar que $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\subset$ Img (T). e.e. debemos resolver en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ la ecuación $T(X)=A$, para $A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ dado. Con esto en mente entonces nos preparamos:

Si $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ es dado y $X=\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned}
T(X)=A &\iff T\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} x+y+z & x-y+2z\\ x-y+z & z+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\\
&\iff \left.\begin{array}{lll}(1)\ x+y+z &=& a\\ (2)\ x-y+2z &=& b\\ (3)\ x-y+z &=& c\\ (4)\ z+t &=& d\end{array}\right|\ \left.\begin{array}{l}\overset{(2)-(3)}{\Longrightarrow}\ z=b-c\\ \overset{(4)}{\Longrightarrow}\ t=d-b+c\end{array}\right\}\\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{lll}(5)\ x+y &=& a-b+c\\ (6)\ x-y &=& -b+2c\end{array}\right|\ \begin{array}{l}\overset{(5)+(6)}{\Longrightarrow}\ x=\dfrac{a-2b+3c}{2}\\ \overset{(5)-(6)}{\Longrightarrow}\ y=\dfrac{a-c}{2}\end{array}
\end{aligned}$$

Luego,

$$X\ =\ \begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{a-2b+3c}{2} & \dfrac{a-c}{2}\\ b-c & d-b+c\end{pmatrix}$$

Y

$$
\begin{aligned}
T(X) &= T\begin{pmatrix} \dfrac{a-2b+3c}{2} & \dfrac{a-c}{2} \\ b-c & d-b+c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{a-2b+3c}{2}+\dfrac{a-c}{2}+b-c & \dfrac{a-2b+3c}{2}-\dfrac{a-c}{2}+2b-2c \\ \dfrac{a-2b+3c}{2}-\dfrac{a-c}{2}+b-c & b-c+d-b+c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{a-2b+3c+a-c+2b-2c}{2} & \dfrac{a-2b+3c-a+c+4b-4c}{2} \\ \dfrac{a-2b+3c-a+c+2b-2c}{2} & b-c+d-b+c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{2a}{2} & \dfrac{2b}{2} \\ \dfrac{2c}{2} & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
T\begin{pmatrix} \dfrac{a-2b+3c}{2} & \dfrac{a-c}{2} \\ b-c & d-b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
$$

Y T es sobreyectiva y por ende un isomorfismo

[b] Determine T^{-1}

Como T es biyectiva entonces del punto anterior sigue que T^{-1} existe y es definida por

$$
T^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a-2b+3c}{2} & \dfrac{a-c}{2} \\ b-c & d-b+c \end{pmatrix}
$$

[4] Si $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ es una función que satisface simultáneamente las propiedades:

[a] T es un homomorfismo no nulo, y

[b] $T \circ T = 0$, es decir $(T \circ T)(u) = (0,0) \quad (\forall u; u \in \mathbb{R}^2)$

Entonces demuestre que T no es inyectiva, (es decir demuestre que $\ker(T) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}$)
Solución

Observamos las siguientes etapas:

[a] Como T es un homomorfismo no nulo entonces existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x,y) \neq (0,0)$ y $T(x,y) = (a,b) \neq (0,0)$

[b] Como $(T \circ T)(u) = (0,0) \quad (\forall u; u \in \mathbb{R}^2)$ entonces en particular $(T \circ T)(x,y) = (0,0)$. Así que

$$
(0,0) = (T \circ T)(x,y) = T(T(x,y)) = T(a,b) \Longrightarrow (a,b) \in \ker(T) \wedge (a,b) \neq (0,0) \Longrightarrow \ker(T) \neq \{0_{\mathbb{R}^2}\}
$$

Conclusión T no inyectiva.