Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Pep 1
Profesor Ricardo Santander Baeza
09 de Mayo del 2011

(1) Dadas las proposiciones lógicas, p, q, r y s. Demuestre usando propiedades básicas (tautologías) que la siguiente proposición es una tautología.

$$[(\sim p \vee q) \wedge (r \vee \sim q) \wedge (\sim r \vee s)] \Longrightarrow [p \Longrightarrow s]$$

Solución

Si a y b son proposiciones entonces sabemos que es una tautología

$$(a \Longrightarrow b) \Longleftrightarrow (\sim a \vee\ b) \tag{1}$$

Por tanto, aplicando (1) iteradamente tenemos que:

$$(\sim p \vee q) \wedge (r \vee \sim q) \wedge (\sim r \vee s) \quad \Longleftrightarrow \quad (p \Longrightarrow q) \wedge (\sim r \Longrightarrow \sim q) \wedge (r \Longrightarrow s) \tag{2}$$

Si a y b son proposiciones entonces sabemos que también es una tautología

$$(a \Longrightarrow b) \Longleftrightarrow (\sim b \Longrightarrow \sim a) \tag{3}$$

Luego, aplicando (3) en (2) tenemos que

$$\begin{aligned}(\sim p \vee q) \wedge (r \vee \sim q) \wedge (\sim r \vee s) &\Longleftrightarrow (p \Longrightarrow q) \wedge (\sim r \Longrightarrow \sim q) \wedge (r \Longrightarrow s)\\ &\Longleftrightarrow (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r) \wedge (r \Longrightarrow s) \qquad (4)\end{aligned}$$

Si a, b y c son proposiciones entonces sabemos que también es una tautología

$$(a \Longrightarrow b \wedge b \Longrightarrow c) \Longrightarrow (a \Longrightarrow c) \tag{5}$$

Finalmente, si aplicamos iteradamente (5) en (4) tenemos

$$\begin{aligned}(\sim p \vee q) \wedge (r \vee \sim q) \wedge (\sim r \vee s) &\Longleftrightarrow (p \Longrightarrow q) \wedge (\sim r \Longrightarrow \sim q) \wedge (r \Longrightarrow s)\\ &\Longleftrightarrow (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r) \wedge (r \Longrightarrow s)\\ &\Longrightarrow (p \Longrightarrow r) \wedge (r \Longrightarrow s)\\ &\Longrightarrow (p \Longrightarrow s)\end{aligned}$$

e.e.

$$(\sim p \vee q) \wedge (r \vee \sim q) \wedge (\sim r \vee s) \quad \Longrightarrow \quad (p \Longrightarrow s)$$

(2) Si la suma de tres números dados en progresión geométrica es 14, y si al primero se le adiciona 1, al segundo 5 y al tercero 7, se obtiene una progresión aritmética entonces determine, si es posible, ambas progresiones.

Solución

(a) Sean $G = \{x, y, z\}$ la progresión geométrica (p.g.) y $A = \{x+1, y+5, z+7\}$ la progresión aritmética (p.a.) pedidas.

(b) Datos o información asociados al problema

(i) $G = \{x, y, z\}$ es una p.g. $\Longleftrightarrow \begin{cases} y = xr \\ z = xr^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} G = \{x, xr, xr^2\} \\ A = \{x+1, xr+5, xr^2+7\} \end{cases}$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

(ii) $x + y + z = 14 \Longleftrightarrow x + xr + xr^2 = 14 \Longleftrightarrow x(1 + r + r^2) = 14 \qquad (*)$

(iii) $A = \{x, y, z\}$es una p.a. $\Longleftrightarrow xr + 5 - (x + 1) = xr^2 + 7 - (xr + 5) \Longleftrightarrow x(r^2 - 2r + 1) = 2 \qquad (**)$

(iv) De $(*)$ y $(**)$, sigue que:

$$\frac{14}{1 + r + r^2} = \frac{2}{r^2 - 2r + 1}0 \Longrightarrow 2r^2 - 5r + 2 = 0 \Longrightarrow r = 2 \vee r = \frac{1}{2}$$

(c) Conclusión del ejercicio.

Si tomamos $r = 2$ entonces sustituyendo en $(*)$, tenemos que $x = 2$ y,

$$G = \{2, 2 \cdot 2, 2 \cdot 4\} = \{2, 4, 8\} \text{ es la p. g. pedida}$$

Y

$$A = \{2 + 1, 4 + 5, 8 + 7\} = \{3, 9, 15\} \text{ es la p.a. pedida.}$$

(3) Demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula

$$F(n) : \ 7^{2n} + 7^{2n-1} + 16n \text{ es divisible por } 8$$

Es verdadera $(\forall n; n \in \mathbb{N})$

Solución

Aplicamos una variante del axioma de inducción de la llamada Axiomática de Peano

Giuseppe Peano 1858-1932

(a) Partimos verificando si $F(1)$ es verdadera.

$$7^{2\cdot 1} + 7^{2\cdot 1-1} + 16 \cdot 1 = 49 + 7 + 16 = 72 = 8 \cdot 9$$

Luego, $7^{2\cdot 1} + 7^{2\cdot 1-1} + 16 \cdot 1$ es divisible por 8 y entonces $F(1)$ es verdadera

(b) Supongamos que $F(n)$ es verdadera para algún $n \in \mathbb{N}$ entonces tenemos que existe k tal que

$$7^{2n} + 7^{2n-1} + 16n = 8 \cdot k \qquad (H)$$

(c) Conforme a la hipótesis de trabajo, debemos verificar que $F(n + 1)$ es verdadera, es decir debemos verificar que existe q tal que

$$7^{2(n+1)} + 7^{2(n+1)-1} + 16(n + 1) = 8 \cdot q \qquad (T)$$

Entonces para partir, tenemos que

$$7^{2(n+1)} + 7^{2(n+1)-1} + 16(n + 1) = 7^{2n+2} + 7^{2n+1} + 16n + 16$$

Así que, aplicamos (H) en el siguiente sentido

$$
(-)\quad
\begin{array}{l}
7^{2n+2}+7^{2n+1}+16n+16 \qquad : \quad 7^{2n}+7^{2n-1}+16n=7^2\\
7^{2n+2}+7^{2n+1}+7^2\cdot 16n\\
-------------\\
16-48\cdot 16n
\end{array}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
7^{2n+2}+7^{2n+1}+16n+16 &= 7^2(7^{2n}+7^{2n-1}+16n)+16-48\cdot 16n\\
&\stackrel{(H)}{=} 7^2(8\cdot k)+16(1-48\cdot n)\\
&= 8\underbrace{[(7^2\cdot k)+2(1-48\cdot n)]}_{q}
\end{aligned}
$$

Así que,

$$
7^{2(n+1)}+7^{2(n+1)-1}+16(n+1) \quad = \quad 8\cdot q
$$

Y $F(n+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera $(\forall n : n\in\mathbb{N})$

(4) Si en el desarrollo binomial $(3x+2)^{34}$ llamamos C y D a los coeficientes de x^s y x^{s+1} respectivamente entonces determine el conjunto

$$
\mathbb{S}=\{s\in\mathbb{R}\mid C=D\}
$$

Solución

(a) Debemos determinar el conjunto $\mathbb{S}$,

(b) $(*)$ induce a pensar que debemos estudiar los términos del binomio, para buscar allí la información que necesitamos, y en este caso el termino general del desarrollo binomial es de la forma,

$$
t_{u+1}=\binom{34}{u}(3x)^{34-u}2^u=\binom{34}{u}3^{34-u}2^u x^{34-u}
$$

(c) Así que como primera conclusión tenemos que: En el desarrollo binomial existen dos términos consecutivos que tengan el mismo coeficiente si se verifica la relación.

$$
\binom{34}{u}(3)^{34-u}2^u=\binom{34}{u+1}(3)^{34-u-1}2^{u+1} \qquad (**)
$$

Pero si $(**)$ ocurre entonces obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\binom{34}{u}=\binom{34}{u+1}\cdot 2\cdot(3)^{-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad 3\cdot\frac{34!}{(34-u)!u!}=2\cdot\frac{34!}{(34-u-1)!(u+1)!}\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{3}{(34-u-1)!(34-u)u!}=\frac{2}{(34-u-1)!u!(u+1)}\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{3}{(34-u)}=\frac{2}{(u+1)}\\
&\Longleftrightarrow \quad 3u+3=68-2u\\
&\Longleftrightarrow \quad 5u=65\\
&\Longleftrightarrow \quad u=13
\end{aligned}
$$

Así que,

$$
\left.
\begin{aligned}
t_{14} &= \binom{34}{13}3^{34-13}2^{13}x^{34-13}=\binom{34}{13}3^{21}2^{13}x^{21}\\
t_{15} &= \binom{34}{14}3^{34-14}2^{14}x^{34-14}=\binom{34}{14}3^{20}2^{14}x^{20}
\end{aligned}
\right\}\Longrightarrow \mathbb{S}=\{20\}
$$

Alternativa.

$$t_{s+1} = \binom{34}{s}(2)^{34-s}(3x)^s = \binom{34}{s}2^{34-s}3^s x^s$$

Así que en el desarrollo binomial existen dos términos consecutivos que tengan el mismo coeficiente si se verifica la relación.

$$\binom{34}{s}(2)^{34-s}3^s = \binom{34}{s+1}(2)^{34-s-1}3^{s+1} \qquad (**)$$

Pero si $(**)$ ocurre entonces obtenemos que

$$\begin{aligned}
\binom{34}{s} = \binom{34}{s+1}\cdot 2^{-1}\cdot(3) \quad &\Longleftrightarrow \quad 2\cdot\frac{34!}{(34-s)!s!} = 3\cdot\frac{34!}{(34-s-1)!(s+1)!}\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{(34-s-1)!(34-s)s!} = \frac{3}{(34-s-1)!s!(s+1)}\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{(34-s)} = \frac{3}{(s+1)}\\
&\Longleftrightarrow \quad 2s+2 = 102-2s\\
&\Longleftrightarrow \quad 5s = 100
\end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{S} = \{20\}$