Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Una Solución del Examen de álgebra [1]
Profesor Ricardo Santander Baeza
15 de marzo del 2012

[1] Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & kz & = & 3 \\ x & + & ky & + & 3z & = & 2 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Determine usando el teorema del rango el conjunto

$$\mathbb{S} = \{k \in \mathbb{R} \mid (*) \text{ No tiene solución}\}$$

Una forma de solución:

Etapa 1. Ingresamos al conjunto $\mathbb{S}$

$$\begin{aligned} k \in \mathbb{S} \quad & \Longleftrightarrow \quad k \in \mathbb{R} \wedge (*) \text{ No tiene solución única} \\ & \Longleftrightarrow \quad k \in \mathbb{R} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ No tiene solución} \\ & \overset{\text{T. del rango}}{\Longleftrightarrow} \quad k \in \mathbb{R} \wedge \rho \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}}_{A} \neq \rho \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & k & | & 3 \\ 1 & k & 3 & | & 2 \end{pmatrix}}_{(A|B)} \end{aligned}$$

Etapa 2. Calculamos $\rho(A|B)$ a través de operaciones elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & k & | & 3 \\ 1 & k & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (l_2 \to l_2 - 2l_1) \\ (l_3 \to l_3 - l_1) \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & k-2 & | & 1 \\ 0 & k-1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} (l_1 \to l_1 - l_2) \\ (l_3 \to l_3 - (k-1)l_2) \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3-k & | & 0 \\ 0 & 1 & k-2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 3k-k^2 & | & (2-k) \end{pmatrix}$$

Ahora, analizamos las situaciones posibles para $(A|B)$

Si $3k - k^2 = 0$ entonces $k = 0 \vee k = 3$ y $\rho(A) = 2 \neq \rho(A|B) = 3$. Luego, en este caso $(*)$ no tiene solución, es decir $0 \in \mathbb{S}$, $3 \in \mathbb{S}$

Si $3k - k^2 = 0$ entonces $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$. Luego, en este caso $(*)$ tiene solución única.

Así que, $\mathbb{S} = \{0, 3\}$

[2] Si $\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 - 2a_1 - a_2 + a_3 = 0 \wedge a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\} \subset \mathbb{R}_3[x]$ entonces

[a] Demuestre que $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$

Usaremos la técnica que provee los generadores del candidato a subespacio, y para ello procedemos como sigue:

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

$$\begin{aligned}
p(x) \in \mathbb{W} \quad &\Leftrightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \wedge a_0 - 2a_1 - a_2 + a_3 = 0 \wedge a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \wedge a_0 + a_3 = 2a_1 + a_2 \wedge a_0 + a_3 = -a_1 - a_2 \\
&\Leftrightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \wedge a_0 + a_3 = 2a_1 + a_2 \wedge a_0 + a_3 = -a_1 - a_2 \wedge 2a_1 + a_2 = -a_1 - a_2 \\
&\Leftrightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \wedge a_0 + a_3 = 2a_1 + a_2 \wedge a_0 + a_3 = -a_1 - a_2 \wedge a_2 = -\frac{3}{2}a_1 \\
&\Leftrightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \wedge a_0 + a_3 = \frac{1}{2}a_1 \wedge a_2 = -\frac{3}{2}a_1 \\
&\Leftrightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \wedge a_3 = -a_0 + \frac{1}{2}a_1 \wedge a_2 = -\frac{3}{2}a_1 \\
&\Leftrightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1x + \left(-\frac{3}{2}a_1\right)x^2 + \left(-a_0 + \frac{1}{2}a_1\right)x^3 : (a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_1 \in \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1x + \left(-\frac{3}{2}a_1\right)x^2 - a_0x^3 + \frac{1}{2}a_1x^3 : (a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_1 \in \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow \quad p(x) = a_0(1 - x^3) + a_1\left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3\right) : (a_0 \in \mathbb{R} \wedge a_1 \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{W} = \left\langle \{1 - x^3, x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3\} \right\rangle \leq \mathbb{R}_3[x] \quad (*)$$

[b] Determine $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W})$

Del resultado obtenido en $(*)$, sabemos que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}) \leq 2$, pues $\alpha = \{1 - x^2, x - x^3\}$ es un sistema de generadores para $\mathbb{W}$. Por tanto si α es linealmente independiente entonces $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}) = 2$, caso contrario, o sea α linealmente dependiente, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}) = 1$. (Ya que todo vector no nulo es linealmente independiente) entonces procedemos a estudiar al conjunto α.

$$a(1 - x^3) + b\left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3\right) = 0_{\mathbb{R}_3[x]} \Rightarrow a + bx - \frac{3}{2}bx^2 + \left(\frac{b}{2} - a\right)x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \Rightarrow a = b = 0$$

Así que α es linealmente independiente y por tanto $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{W}) = 2$

[3] Si en el espacio de matrices $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4 \times 1)$ definimos el producto interno

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 \tag{1}$$

Y consideramos el subespacio $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4 \times 1) \mid x - 2y + z - t = 0 \right\}$ entonces respecto del producto interno definido en (1). Determine

[a] Una base ortogonal para $\mathbb{W}$

Iniciamos el protocolo determinando un sistema de generadores de $\mathbb{W}$:

$$\begin{aligned}
A \in \mathbb{W} \quad &\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4 \times 1) \ \wedge \ x - 2y + z - t = 0 \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4 \times 1) \ \wedge \ t = x - 2y + z \\
&\Longleftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x - 2y + z \end{pmatrix} \wedge (x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}) \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ -2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} \wedge (x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}) \\
&\Longleftrightarrow \quad A = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge (x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{R}) \Longleftrightarrow A \in \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle
\end{aligned}$$

Luego

$$\mathbb{W} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Ahora que $\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para $\mathbb{W}$, no cabe duda pues, si

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a-2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = 0$$

Finalmente procedemos a ortogonalizar α usando el proceso de Jorgen Pedersen Gram y Erhard Schmidt: Sea

$$\begin{aligned}
v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
v_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
v_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Y una base ortogonal de $\mathbb{W}$ es:

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \right\}$$

[b] $P_{\mathbb{W}} : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4 \times 1) \longmapsto \mathbb{W}$. Es decir la proyección ortogonal $P_{\mathbb{W}}$ de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4 \times 1)$ en $\mathbb{W}$

Definimos directamente la proyección ortogonal como sigue:

$$P_{\mathbb{W}}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}\\ 1\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}\\ 1\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}\right\|^2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}\\ 1\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{x+t}{2}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + \frac{x+y-t}{3}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} + \frac{-x+2y+6z+t}{7}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}\\ 1\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

[c] $d\left(\begin{pmatrix} 1\\ 3\\ 6\\ 1\end{pmatrix}, \mathbb{W}\right)$, la distancia de $\begin{pmatrix} 1\\ 3\\ 6\\ 1\end{pmatrix}$ al subespacio $\mathbb{W}$

Como $\begin{pmatrix} 1\\ 3\\ 6\\ 1\end{pmatrix} \in \mathbb{W}$ entonces $d\left(\begin{pmatrix} 1\\ 3\\ 6\\ 1\end{pmatrix}, \mathbb{W}\right) = 0$

[4] Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$ y $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\} \subset (\mathbb{V} - \{0_{\mathbb{V}}\})$. Muestre que

$$\left.\begin{array}{r}\langle v_1, v_2\rangle = 0\\ \langle v_1, v_3\rangle = 0\\ \langle v_2, v_3, \rangle = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \text{ es un conjunto linealmente independiente}$$

En efecto, aplicando la definición de independencia lineal tenemos que, para $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0_{\mathbb{V}} &\implies \langle a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3, v_i\rangle = \langle 0_{\mathbb{V}}, v_i\rangle \Longrightarrow \\ \langle a_1v_1, v_i\rangle + \langle a_2v_2, v_i\rangle + \langle a_3v_3, v_i\rangle = 0_{\mathbb{V}} &\implies a_1\langle v_1, v_i\rangle + a_2\langle v_2, v_i\rangle + a_3\langle v_3, v_i\rangle = 0_{\mathbb{V}} \end{aligned}$$

Si $i = 1$ tenemos que

$$a_1\langle v_1, v_1\rangle + a_2\langle v_2, v_1\rangle + a_3\langle v_3, v_1\rangle = 0_{\mathbb{V}} \Longrightarrow a_1\langle v_1, v_1\rangle + a_2\cdot 0 + a_3\cdot 0 = 0_{\mathbb{V}} \Longrightarrow a_1 = 0, \text{ pues } v_1 \neq 0_{\mathbb{V}}$$

Si $i = 2$ tenemos que

$$a_1\langle v_1, v_2\rangle + a_2\langle v_2, v_2\rangle + a_3\langle v_3, v_2\rangle = 0_{\mathbb{V}} \Longrightarrow a_1\cdot 0 + a_2\langle v_2, v_2\rangle + a_3\cdot 0 = 0_{\mathbb{V}} \Longrightarrow a_2 = 0, \text{ pues } v_2 \neq 0_{\mathbb{V}}$$

Finalmente, si $i = 3$ tenemos que

$$a_1\langle v_1, v_3\rangle + a_2\langle v_2, v_3\rangle + a_3\langle v_3, v_3\rangle = 0_{\mathbb{V}} \Longrightarrow a_1\cdot 0 + a_2\cdot 0 + a_3\langle v_3, v_3\rangle = 0_{\mathbb{V}} \Longrightarrow a_3 = 0, \text{ pues } v_3 \neq 0_{\mathbb{V}}$$

Conclusión $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ y α es linealmente independiente.