Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Pep 4
Profesor Ricardo Santander Baeza
06 de Diciembre del 2010

(1) Si consideramos la función $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}_2[x]$ tal que $T(a,b,c) = (a+2b+3c) + (a-3b+c)x + (a+b+c)x^2$ entonces demuestre que T es un isomorfismo.

Solución

Verificamos que $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[x])$. Para ello hacemos lo siguiente:

Si $u_1 \in \mathbb{R}^3$ y $u_2 \in \mathbb{R}^3$ entonces p.d.q. $T(u_1+u_2) = T(u_1) + T(u_2)$. Así que

$$\begin{aligned} u_1 \in \mathbb{R}^3 &\iff u_1 = (a_1, b_1, c_1) \\ u_2 \in \mathbb{R}^3 &\iff u2 = (a_2, b_2, c_2) \end{aligned}$$

De donde sigue que

$$\begin{aligned} T(u_1+u_2) &= T(a_1+a_2, a_1+b_1, c_1+c_2) \\ &= (a_1+a_2+2(b_1+b_2)+3(c_1+c_2)) + (a_1+a_2-3(b_1+b_2)+c_1+c_2)x + (a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2)x^2 \\ &= (a_1+a_2+2b_1+2b_2)+3c_1+3c_2) + (a_1+a_2-3b_1-3b_2+c_1+c_2)x + (a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2)x^2 \\ &= (a_1+2b_1+3c_1)+(a_1-3b_1+c_1)x+(a_1+b_1+c_1)x^2+(a_2+2b_2+3c_2)+(a_2-3b_2+c_2)x+(a_2+b_2+c_2)x^2 \\ &= T(a_1,b_1,c_1)+T(a_2,b_2,c_2) \\ &= T(u_1)+T(u_2) \end{aligned}$$

Además si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces p.d.q. $T(\lambda u_1) = \lambda T(u_1)$.

$$\begin{aligned} T(\lambda u_1) &= T(\lambda a_1, \lambda b_1, \lambda c_1) \\ &= (\lambda a_1 + 2\lambda b_1 + 3\lambda c_1) + (\lambda a_1 - 3\lambda b_1 + \lambda c_1)x + (\lambda a_1 + \lambda b_1 + \lambda c_1)x^2 \\ &= \lambda(a_1+2b_1+3c_1) + (\lambda(a_1-3b_1+c_1))x + (\lambda(a_1+b_1+c_1))x^2 \\ &= \lambda((a_1+2b_1+3c_1)+(a_1-3b_1+c_1)x+(a_1+b_1+c_1)x^2) \\ &= \lambda T(a_1,b_1,c_1) \\ &= \lambda T(u_1) \end{aligned}$$

Ahora verificamos si T es un isomorfismo, por ejemplo usando la representación matricial de T en las bases canónicas:

Donde $\beta = \{1, x, x^2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $c(3) = \{(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ entonces por definición de coordenadas

$$T(a,b,c) = (a+2b+3c) + (a-3b+c)x + (a+b+c)x^2 \Longrightarrow [T(a,b,c)]_\beta = \begin{pmatrix} a+2b+3c \\ a-3b+c \\ a+b+c \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$[T]_{c(3)}^{\beta} = ([T(1,0,0)]_\beta \;\; [T(0,1,0)]_\beta \;\; [T(0,0,1)]_\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 8 \neq 0 \Longrightarrow T \text{ isomorfismo}$$

[1]Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

(2) Si $h \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2), \mathbb{R}^3)$ definida por $h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b+c, a+b+d, d+c)$, y considerando las bases $\alpha = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ y $\beta = \{(1,0,1), (1,1,0), (-2,-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$

(a) Determine la matriz $[h]_{\alpha}^{\beta}$

Solución

Por construcción tenemos que la representación matricial de una transformación lineal depende de las bases y es de la forma:

$$[h]_{\alpha}^{\beta} = \left(\left[h\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\beta} \left[h\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\beta} \left[h\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\beta} \left[h\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\beta}\right)$$

Ahora si determinamos en general $\left[h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{\beta}$ obtenemos en particular las columnas de nuestra matriz. Así hacer esto es una buena idea.

$$\begin{aligned}
\left[h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{\beta} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\iff h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = x(1,0,1) + y(1,1,0) + z(-2,-1,0) \\
&\iff (a-b+c, a+b+d, d+c) = (x+y-2z, y-z, x) \\
&\iff \begin{array}{|rcl} a-b+c & = & x+y-2z \\ a+b+d & = & y-z \\ d+c & = & x \end{array} \Rightarrow x = (d+c) \wedge \begin{array}{|rcl} a-b-d & = & y-2z \\ a+b+d & = & y-z \end{array} \\
&\Rightarrow \quad x = (d+c) \wedge z = (2b+2d) \wedge y = (a+3b+3d)
\end{aligned}$$

Así que hemos obtenido que

$$\left[h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]_{\beta} = \begin{pmatrix} c+d \\ a+3b+3d \\ 2b+2d \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Luego,

$$[h]_{\alpha}^{\beta} = \left(\left[h\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\beta} \left[h\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\beta} \left[h\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{\beta} \left[h\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_{\beta}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Determine el conjunto $\mathbb{U} = \left\{ A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid [h]_{\alpha}^{\beta}[A]_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Solución

$$\begin{aligned}
A\in\mathbb{U} &\iff A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\ \wedge\ [h]_{\alpha}^{\beta}[A]_{\alpha}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff A\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\ \wedge\ [h(A)]_{\beta}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\ \wedge\ \begin{pmatrix}c+d\\ a+3b+3d\\ 2b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\ \wedge\ \begin{array}{lcl|}c+d & = & 0\\ a+3b+3d & = & 0\\ 2b+2d & = & 0\\ \hline\end{array}\\
&\iff A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\ \wedge\ \begin{array}{lcl|}c+d & = & 0\\ a+3(b+d) & = & 0\\ 2(b+d) & = & 0\\ \hline\end{array}\Rightarrow (b+d)=0\wedge a=0\wedge(c+d)=0\\
&\implies A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)\ \wedge\ a=0\wedge b=c=-d\\
&\implies A=\begin{pmatrix}0 & -d\\ -d & d\end{pmatrix}\wedge d\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Así que $\mathbb{U}=\left\langle\left\{\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$

(3) Si en el espacio vectorial $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$ sobre $\mathbb{R}$ consideramos el subespacio

$$\mathbb{U}=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)\mid 2a-3b+c=0\right\}$$

Y además definimos en $\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$ el producto interno:

$$\left\langle\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{21}\\b_{31}\end{pmatrix}\right\rangle=a_{11}\cdot b_{11}+2a_{21}\cdot b_{21}+3a_{31}\cdot b_{31}\qquad(*)$$

entonces respecto del producto definido en $(*)$

(a) Determine una base ortogonal para $\mathbb{U}$

Solución

$$\begin{aligned}
A\in\mathbb{U} &\iff A=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)\ \wedge\ 2a-3b+c=0\iff A=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)\ \wedge\ c=-2a+3b\\
&\iff A=\begin{pmatrix}a\\b\\-2a+3b\end{pmatrix}\quad a\in\mathbb{R}\wedge b\in\mathbb{R}\iff A=\begin{pmatrix}a\\0\\-2a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b\\3b\end{pmatrix}\quad a\in\mathbb{R}\wedge b\in\mathbb{R}\\
&\iff A=a\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\quad a\in\mathbb{R}\wedge ab\in\mathbb{R}\iff A\in\left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\}\right\rangle
\end{aligned}$$

Luego, $\mathbb{U}=\left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\}\right\rangle\le\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$

Ahora si llamamos $\alpha=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$ entonces α genera $\mathbb{U}$ y $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{U})\le 2$. Pero si hacemos

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\implies\begin{pmatrix}a\\b\\-2a+3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\implies a=b=0$$

Y α es linealmente independiente, por ende una base para $\mathbb{U}$, y $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{U})=2$

Verifiquemos ahora, si α es una base ortogonal respecto del producto definido en (**??**).

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-6) = -18$$

Como α no es ortogonal entonces ortogonalizamos usando Gram Schmidt, y para ello hacemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-18}{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{13} \\ 1 \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix}$$

Luego, $\alpha' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{18}{13} \\ 1 \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix} \right\}$ es una base ortogonal, como se verifica directamente "haciendo las cuentas"

(b) Construya la proyección ortogonal $P_{\mathbb{U}} : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1) \longmapsto \mathbb{U}$
Solución

Aplicando la definición de proyección ortogonal tenemos:

$$\begin{aligned}
P_{\mathbb{W}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{18}{13} \\ 1 \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} \frac{18}{13} \\ 1 \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} \frac{18}{13} \\ 1 \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix} \\
&= \frac{x - 6z}{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{\frac{18x}{13} + 2y + \frac{9z}{13}}{\left\| \begin{pmatrix} \frac{18}{13} \\ 1 \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} \frac{18}{13} \\ 1 \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix} \\
&= \frac{x - 6z}{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{\frac{18x+26y+9z}{13}}{(\frac{18}{13})^2 + 2 + 3(\frac{3}{13})^2} \begin{pmatrix} \frac{18}{13} \\ 1 \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix} \\
&= \frac{x - 6z}{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{\frac{18x+26y+9z}{13}}{\frac{324+338+27}{13^2}} \begin{pmatrix} \frac{18}{13} \\ 1 \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix} \\
&= \frac{x - 6z}{13} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{18x + 26y + 9z}{53} \begin{pmatrix} \frac{18}{13} \\ 1 \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) Calcule $d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{U}\right)$, la distancia de la matriz $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ al subespacio $\mathbb{U}$.
Solución

Como, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{U}$ entonces $d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{U}\right) = 0$. Caso contrario, es decir usted no usa propiedades entonces debe calcular directamente, y

$$P_{\mathbb{W}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{-5}{13}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\frac{53}{53}\begin{pmatrix}\frac{18}{13}\\1\\\frac{3}{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

(4) Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial tal que $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})=3$. Sea $\alpha=\{v_1,v_2,v_3\}\subset\mathbb{V}$. Demuestre que

$$\beta=\{v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3\} \text{ es una base de } \mathbb{V} \implies \alpha \text{ es una base de } \mathbb{V}$$

Solución

(a) Si queremos mostrar que α es una base entonces para cada $u\in\mathbb{V}$ deben tener solución única la ecuación

$$u=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3 \tag{1}$$

e.e. a_1,a_2,a_3 son escalares únicos que satisfacen la ecuación (1).

(b) Como β es una base de $\mathbb{V}$ existen únicos escalares c_1,c_2,c_3 tales que

$$u=c_1v_1+c_2(v_1+v_2)+c_3(v_1+v_2+v_3) \tag{2}$$

entonces usando la representación única del vector u descrita en (2), podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} u &= c_1v_1+c_2(v_1+v_2)+c_3(v_1+v_2+v_3)\\ &= c_1v_1+c_2v_1+c_2v_2+c_3v_1+c_3v_2+c_3v_3\\ &= c_1v_1+c_2v_1+c_3v_1+c_2v_2+c_3v_2+c_3v_3\\ &= (c_1+c_2+c_3)v_1+(c_2+c_3)v_2+c_3v_3 \end{aligned} \tag{3}$$

(c) Comparando (3) y (1), (no olvide las condiciones de unicidad existentes), obtenemos que

$$u=(c_1+c_2+c_3)v_1+(c_2+c_3)v_2+c_3v_3$$

Así que, α es un sistema de generadores y como la dimensión de $\mathbb{V}=3$ entonces es una base.