Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Pep 3
Profesor Ricardo Santander Baeza
25 de Octubre del 2010

(1) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)$ entonces determine el conjunto

$$\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R} \mid A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4))\}$$

Solución

(a) Sabemos que

$$x \in \mathbb{H} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} \wedge A \notin \mathbb{U}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(4)) \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge \det(A) = 0$$

(b) Del punto anterior, sigue que debemos calcular el $\det(A)$.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{pmatrix} \overset{(l_2 \to l_2 + l_1)}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & x+1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x+1 & 1 & -3 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix} = (x+1)\det \begin{pmatrix} x & 0 \\ -1 & x \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & x \end{pmatrix} \\ &= x^3 + x^2 + x - 3 \end{aligned} \qquad (*)$$

(c) Si llamamos $p(x) = x^3 + x^2 + x - 3$ entonces observamos que $p(1) = 0$, es decir dividiendo $p(x)$ por $x - 1$ obtenemos

$$x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)(x^2 + 2x + 3) \qquad (**)$$

(d) Además, como

$$x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0 \quad (\forall x; x \in \mathbb{R})$$

Entonces de $(**)$ sigue que

$$\det(A) = 0 \Longleftrightarrow x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

Por tanto

$$\mathbb{H} = \{1\}$$

(2.a) Si llamamos $u = \dfrac{2 + z^n + (\overline{z})^n}{(1+z^n)(1+\overline{z}^n)}$, para $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces demuestre que $\overline{u} = u$, es decir $Im(u) = 0$

Solución

Como, u puede ser reescrito en la forma:

$$u = \frac{1 + z^n + 1 + \overline{z}^n}{(1+z^n)(1+\overline{z}^n)} = \frac{1}{(1+\overline{z}^n)} + \frac{1}{(1+z^n)}$$

entonces

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

$$\begin{aligned}
\overline{u} &= \overline{\left(\frac{1}{(1+\overline{z}^n)}+\frac{1}{(1+z^n)}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{(1+\overline{z}^n)}\right)} + \overline{\left(\frac{1}{(1+z^n)}\right)} = \frac{\overline{1}}{\overline{(1+\overline{z}^n)}} + \frac{\overline{1}}{\overline{(1+z^n)}} \\
&= \frac{\overline{1}}{(\overline{1}+\overline{\overline{z}^n})} + \frac{\overline{1}}{(\overline{1}+\overline{z^n})} = \frac{\overline{1}}{(\overline{1}+\overline{\overline{z}}^n)} + \frac{\overline{1}}{(\overline{1}+\overline{z}^n)} = \frac{1}{(1+z^n)} + \frac{1}{(1+z^n)} = u
\end{aligned}$$

(2.b) Si $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $\omega \neq 1$, y $\omega^3 = 1$ demuestre que

$$(1-w+w^2)(1+w-w^2) = 4$$

Solución

Sabemos que

$$[\omega^3 = 1 \wedge \omega \neq 1] \Longrightarrow 1+\omega+\omega^2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 1+\omega^2 = -\omega \\ 1+\omega = -\omega^2 \end{cases}$$

Luego,

$$(1-w+w^2)(1+w-w^2) = (-2\omega)(-2\omega^2) = 4\omega^3 = 4$$

(3) Dado el sistema lineal

$$\begin{array}{rcrcrcl|} x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & + & (m-1)z & = & m \\ x & + & y & + & z & = & m+1 \\ \hline \end{array} \qquad (*)$$

Determine el conjunto:

$$\mathbb{S} = \{m \in \mathbb{R} \mid \text{ el sistema } (*) \text{ no tiene solución}\}$$

Solución
Usaremos el teorema del rango y entonces procedemos a determinar el rango de $(A|B)$, la matriz ampliada asociada al sistema $(*)$.

$$\begin{aligned}
(A|B) &\sim \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & |1 \\ m & 1 & (m-1) & |m \\ 1 & 1 & 1 & |m+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (l_2 \to l_2 - ml_1) \\ (l_3 \to l_3 - l_1) \end{matrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & |1 \\ 0 & 1-m^2 & -1 & |0 \\ 0 & 1-m & 0 & |m \end{pmatrix} (l_2 \leftrightarrow l_3) \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & |1 \\ 0 & 1-m & 0 & |m \\ 0 & 1-m^2 & -1 & |0 \end{pmatrix} \qquad (**)
\end{aligned}$$

Caso 1: Si $m = 1$ entonces sustituyendo en $(**)$ tenemos que

$$(A|B) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & 0 & 0 & |1 \\ 0 & 0 & -1 & |0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(A|B) \neq \rho(A) \Longrightarrow 1 \in \mathbb{S}$$

Caso 2: Si $m \neq 1$ entonces podemos seguir escalonando en $(**)$, es decir,

$$(A|B) \sim \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & |1 \\ 0 & 1-m & 0 & |m \\ 0 & 1-m^2 & -1 & |0 \end{pmatrix} \; (l_2 \to \frac{1}{1-m} l_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & |1 \\ 0 & 1 & 0 & |\frac{m}{1-m} \\ 0 & 1-m^2 & -1 & |0 \end{pmatrix} \; \begin{array}{l} (l_1 \to l_1 - ml_2) \\ (l_3 \to l_3 - (1-m^2)l_2) \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & |1 - \frac{m^2}{1-m} \\ 0 & 1 & 0 & |\frac{m}{1-m} \\ 0 & 0 & -1 & |-\frac{m(1-m^2)}{1-m} \end{pmatrix}$$

Luego, $\rho(A|B) = \rho(A) \Longrightarrow 1 \notin \mathbb{S}$. Así que $\mathbb{S} = \{1\}$

(4.a) Demuestre que

$$\mathbb{W} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_0 + 2a_1 = 0 \wedge a_2 - a_3 = 0\} \leq \mathbb{R}_3[x]$$

Solución Podemos usar generadores para verificar directamente que este es un subespacio.

$$\begin{aligned} p(x) \in \mathbb{W} \iff & p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \;\wedge\; [a_0 + 2a_1 = 0 \wedge a_2 - a_3 = 0] \\ \iff & p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x] \;\wedge\; [a_0 = -2a_1 \wedge a_2 = a_3] \\ \iff & p(x) = -2a_1 + a_1x + a_2x^2 + a_2x^3, \quad (a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \in \mathbb{R}) \\ \iff & p(x) = a_1(-2 + x) + a_2(x^2 + x^3), \quad (a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \in \mathbb{R}) \\ \iff & p(x) \in \langle\{\underbrace{-2 + x}_{\in \mathbb{W}}, \underbrace{x^2 + x^3}_{\in \mathbb{W}}\}\rangle \end{aligned}$$

Así que

$$\mathbb{W} = \langle\{-2 + x, x^2 + x^3\}\rangle$$

(4.b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces demuestre que

$$\mathbb{W} = \{B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid A \cdot B = B \cdot A\} \leq \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$$

Solución

Usemos la caracterización de subespacio, para mostrar en este caso que $\mathbb{W}$, lo es:

$$B \in \mathbb{W} \iff B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \;\wedge\; A \cdot B = B \cdot A$$

(a) Como $B = (0) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \;\wedge\; A \cdot (0) = (0) \cdot (A) = (0)$ entonces $(0) \in \mathbb{W}$ y $\mathbb{W} \neq \emptyset$

(b) Si $B_1 \in \mathbb{W}$ y $B_2 \in \mathbb{W}$ entonces p.d.q. $(B_1 + B_2) \in \mathbb{W}$.

$$\begin{aligned} B_1 \in \mathbb{W} \iff & B_1 \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \;\wedge\; A \cdot B_1 = B_1 \cdot A \qquad (*) \\ B_2 \in \mathbb{W} \iff & B_2 \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \;\wedge\; A \cdot B_2 = B_2 \cdot A \qquad (**) \end{aligned}$$

Entonces

$$B_1 \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge B_2 \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \Longrightarrow (B_1 + B_2) \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2), (\text{pues } \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \text{ es un } \mathbb{R} \text{ espacio vectorial}).$$

Por otra parte,

$$(B_1 + B_2) \cdot A = B_1 \cdot A + B_2 \cdot A = \underbrace{A \cdot B_1}_{(*)} + \underbrace{A \cdot B_2}_{(**)} = A \cdot (B_1 + B_2)$$

Por tanto, $(B_1 + B_2) \in \mathbb{W}$

(c) Si $B_1 \in \mathbb{W}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces p.d.q. $\lambda \cdot B_1 \in \mathbb{W}$

$$B_1 \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda \cdot B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2), (\text{pues } \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \text{ es un } \mathbb{R} \text{ espacio vectorial}).$$

Por otra parte,

$$(\lambda \cdot B_1) \cdot A = \lambda \cdot (B_1 \cdot A) = \lambda \cdot \underbrace{(A \cdot B_1)}_{(*)} = A \cdot (\lambda \cdot B_1)$$

Por tanto, $\lambda \cdot B_1 \in \mathbb{W}$, y $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$