Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Pep 2

Profesor Ricardo Santander Baeza
05 de Julio del 2010

(1) Si llamamos $\mathbb{S} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \mid a_{12} - a_{21} = 0 \right\}$, y definimos en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ la relación

$$A \,\Re\, B \Longleftrightarrow (A - B) \in \mathbb{S}$$

(a) Demuestre que $\Re$ es una relación de equivalencia

Antes de comenzar podemos operacionalizar la relación $\Re$.
Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned}
A \Re B &\Longleftrightarrow (A - B) \in \mathbb{S} \\
&\Longleftrightarrow \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{S} \\
&\Longleftrightarrow \left[\begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{S} \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge (a_{12} - b_{12}) - (a_{21} - b_{21}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge (a_{12} - b_{12}) = (a_{21} - b_{21})
\end{aligned}$$

Así que

$$A \Re B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge (a_{12} - b_{12}) = (a_{21} - b_{21}) \tag{1}$$

(i) Verifiquemos, si $\Re$ es una relación reflexiva.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ entonces

$$\begin{aligned}
A - A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge 0 = 0
\end{aligned}$$

Entonces $(A - A) \in \mathbb{S}$ y $A \Re A$. Así que $\Re$ es una relación reflexiva.

(ii) Verifiquemos, si $\Re$ es una relación simétrica.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ y $A \Re B$ entonces de (1), sigue que

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

$$A\Re B \iff \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge (a_{12}-b_{12}) = (a_{21}-b_{21})$$

Ahora, por una parte

$$B - A = \begin{pmatrix} b_{11}-a_{11} & b_{12}-a_{12} \\ b_{21}-a_{21} & b_{22}-a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$$

Y por otra,

$$b_{12}-a_{12} = -(a_{12}-b_{12}) \overset{(1)}{=} -(a_{21}-b_{21}) = b_{21}-a_{21}$$

Así que, $(B-A) \in \mathbb{S}$ y $B\Re A$. Conclusión $\Re$ es una relación simétrica ya que,

$$A\Re B \implies B\Re A$$

(iii) Verifiquemos, si $\Re$ es una relación transitiva.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ y suponemos que $A\Re B$ y $B\Re C$ entonces de (1), sigue que

$$A\Re B \iff \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge (a_{12}-b_{12}) = (a_{21}-b_{21}) \quad (2)$$

$$B\Re C \iff \begin{pmatrix} b_{11}-c_{11} & b_{12}-c_{12} \\ b_{21}-c_{21} & b_{22}-c_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge (b_{12}-c_{12}) = (b_{21}-c_{21}) \quad (3)$$

Ahora,

$$A - C = \begin{pmatrix} a_{11}-c_{11} & a_{12}-c_{12} \\ a_{21}-c_{21} & a_{22}-c_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$$

Y,

$$\begin{aligned} a_{12}-c_{12} &= \underbrace{(a_{12}-b_{12})}_{(2)} + \underbrace{(b_{12}-c_{12})}_{(3)} \\ &= (a_{21}-b_{21}) + (b_{21}-c_{21}) \\ &= a_{21}-c_{21} \end{aligned}$$

Luego, $(A-C) \in \mathbb{S}$ y $A\Re C$, es decir $\Re$ es transitiva y con lo anterior es una relación de equivalencia.

(b) Muestre que $A \in \mathbb{S} \iff A \, \Re \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En efecto

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{S} &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ a_{12}-a_{21} = 0 \\ &\iff A = A - (0) = \begin{pmatrix} a_{11}-0 & a_{12}-0 \\ a_{21}-0 & a_{22}-0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ (a_{12}-0)-(a_{21}-0) = 0 \\ &\iff A = A - (0) = \begin{pmatrix} a_{11}-0 & a_{12}-0 \\ a_{21}-0 & a_{22}-0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \ \wedge \ (a_{12}-0) = (a_{21}-0) \\ &\iff A \, \Re \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) Sea $\mathbb{A}$ un conjunto tal que $\mathbb{A} \neq \emptyset$. Considere las funciones $h_1 : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{A}$, $h_2 : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{A}$ y $h_3 : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{A}$.

(a) Demuestre que $(h_1 \circ h_2 = h_1 \circ h_3 \quad \wedge \quad h_1 \text{ inyectivo}) \Longrightarrow h_2 = h_3$
Solución

Para cada $a \in \mathbb{A}$.

$$(h_1 \circ h_2)(a) = (h_1 \circ h_3)(a) \Longleftrightarrow h_1(h_2(a)) = h_1(h_3(a)) \stackrel{h \text{ inyectiva}}{\Longrightarrow} h_2(a) = h_3(a) \Longrightarrow h_2 = h_3$$

(b) Demuestre que $(h_2 \circ h_1 = h_3 \circ h_1 \quad \wedge \quad h_1 \text{ sobreyectivo}) \Longrightarrow h_2 = h_3$
Solución

Para cada $a \in \mathbb{A}$ existe $b \in \mathbb{A}$ tal que $h_1(b) = a$, pues h_1 es sobreyectiva. Por tanto

$$h_2(a) = h_2(h_1(b)) = (h_2 \circ h_1)(b) = (h_3 \circ h_1)(b) = h_3(h_1(b)) = h_3(a)$$

Así que, $h_2 = h_3$

(3) Sea $h : \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3 \times 1)$ tal que $h(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 + \lambda a_1 - a_2 \\ a_0 - 2\lambda a_1 + a_2 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$

(a) Demuestre que h es un homomorfismo de grupos, $(\forall \lambda, \lambda \in \mathbb{R})$

Solución

Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ entonces

$$\begin{aligned}
h(p(x) + q(x)) &= h((a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2)) \\
&= h((a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2)) \\
&= \begin{pmatrix} (a_0 + b_0) + \lambda(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) \\ (a_0 + b_0) - 2\lambda(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \\ \lambda(a_2 + b_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_0 + \lambda a_1 - a_2) + (b_0 + \lambda b_1 - b_2) \\ (a_0 - 2\lambda a_1 + a_2) + (b_0 - 2\lambda b_1 + b_2) \\ (\lambda a_2) + (\lambda b_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_0 + \lambda a_1 - a_2 \\ a_0 - 2\lambda a_1 + a_2 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 + \lambda b_1 - b_2 \\ b_0 - 2\lambda b_1 + b_2 \\ \lambda b_2 \end{pmatrix} \\
&= h(a_0 + a_1x + a_2x^2) + h(b_0 + b_1x + b_2x^2) \\
&= h(p(x)) + h(q(x))
\end{aligned}$$

Por tanto h es un homomorfismo

(b) Determine el conjunto

$$\mathbb{K} \quad = \quad \{\lambda \in \mathbb{R} \mid h \text{ es inyectiva}\}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathbb{K} &\Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ h \text{ es inyectiva} \\
&\Longleftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ \ker(h) = \{0_{\mathbb{R}_2[x]}\}
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\ker(h) = \{0_{\mathbb{R}_2[x]}\} \iff (h(p(x)) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1} \Longrightarrow p(x) = 0 + 0x + 0x^2)$$

Entonces para $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{aligned}
h(p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1} &\iff \begin{pmatrix} a_0 + \lambda a_1 - a_2 \\ a_0 - 2\lambda a_1 + a_2 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left.\begin{array}{lcl} a_0 + \lambda a_1 - a_2 & = & 0 \\ a_0 - 2\lambda a_1 + a_2 & = & 0 \\ \lambda a_2 & = & 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \lambda = 0 \vee a_2 = 0 \\
&\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} a_0 + \lambda a_1 & = & 0 \\ a_0 - 2\lambda a_1 & = & 0 \end{array}\right| \text{(forzosamente } \lambda \neq 0 \text{ y } a_2 = 0\text{, pues } h \text{ es inyectiva)} \\
&\Longrightarrow 3\lambda a_1 = 0 \\
&\Longrightarrow \lambda \neq 0 \wedge a_0 = a_1 = a_2 = 0
\end{aligned}$$

Finalmente, $\mathbb{K} = \mathbb{R} - \{0\}$

(4) Si definimos el homomorfismo $H : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que $H\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (a+b-c) & (a-b+c) \\ c-d & c+2d \end{pmatrix}$ entonces

(a) Demuestre que H es un isomorfismo de grupos.
Solución

Como, h es un homomorfismo, sólo falta mostrar que H es biyectiva. Para ver la inyectividad de H estudiamos $\ker(H)$.

$$\begin{aligned}
A \in \ker(H) &\iff A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge H(A) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge H\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \begin{pmatrix} (a+b-c) & (a-b+c) \\ c-d & c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \left.\begin{array}{lcl} (a+b-c) & = & 0 \\ (a-b+c) & = & 0 \\ c-d & = & 0 \\ c+2d & = & 0 \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \left.\begin{array}{lcl} (a+b-c) & = & 0 \\ (a-b+c) & = & 0 \\ c-d & = & 0 \\ 3d & = & 0 \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge \left.\begin{array}{lcl} a+b & = & 0 \\ a-b & = & 0 \end{array}\right| \wedge c = d = 0 \\
&\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \wedge a = b = c = d = 0 \\
&\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por tanto $\ker(H) = \{0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)}\}$ y H es inyectivo

Para ver la sobreyectividad, debemos estudiar la solución de la ecuación $H(X) = A$ en $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$. para $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ dada.

Es decir, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces

$$H\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} (x_1 + x_2 - x_3) & (x_1 - x_2 + x_3) \\ x_3 - x_4 & x_3 + 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\iff \left.\begin{array}{lcl} (x_1 + x_2 - x_3) & = & a \\ (x_1 - x_2 + x_3) & = & b \\ x_3 - x_4 & = & c \\ x_3 + 2x_4 & = & d \end{array}\right|$$

$$\iff \left.\begin{array}{lcl} (x_1 + x_2 - x_3) & = & a \\ (x_1 - x_2 + x_3) & = & b \\ x_3 - x_4 & = & c \\ 3x_4 & = & d - c \end{array}\right|$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} (x_1 + x_2 - x_3) & = & a \\ (x_1 - x_2 + x_3) & = & b \\ x_3 - x_4 & = & c \end{array}\right| \wedge x_4 = \frac{d-c}{3}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} (x_1 + x_2 - x_3) & = & a \\ (x_1 - x_2 + x_3) & = & b \end{array}\right| \wedge x_4 = \frac{d-c}{3} \wedge x_3 = \frac{2c+d}{3}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} (x_1 + x_2 - x_3) & = & a \\ 2x_1 & = & a + b \end{array}\right| \wedge x_4 = \frac{d-c}{3} \wedge x_3 = \frac{2c+d}{3}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{lcl} (x_1 + x_2 - x_3) & = & a \end{array}\right| \wedge x_4 = \frac{d-c}{3} \wedge x_3 = \frac{2c+d}{3} \wedge x_1 = \frac{a+b}{2}$$

$$\Longrightarrow x_4 = \frac{d-c}{3} \wedge x_3 = \frac{2c+d}{3} \wedge x_1 = \frac{a+b}{2} \wedge x_2 = \frac{3a - 3b + 4c + 2d}{6}$$

Así que

$$H\left(\begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{3a - 3b + 4c + 2d}{6} \\ \frac{2c+d}{3} & \frac{d-c}{3} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Así que H es sobreyectiva y por tanto biyectiva.

(b) Determine H^{-1}

Solución

Del punto anterior, tenemos que $H^{-1} : \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2) \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(2)$ tal que

$$H^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{3a - 3b + 4c + 2d}{6} \\ \frac{2c+d}{3} & \frac{d-c}{3} \end{pmatrix}$$