Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Pep 1
Profesor Ricardo Santander Baeza
24 de Mayo del 2010

(1) Definido $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x \in \mathbb{R}[x]$ entonces

(a) Determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{a \in \mathbb{R} \mid p(a) = 0\}$$

Solución
Etapa 1. Debemos determinar el conjunto $\mathbb{S}$.

Etapa 2. Gestión de la información.

(i) Tenemos que estudiar los elementos de S, e.e.

$$a \in \mathbb{S} \Longleftrightarrow a \in \mathbb{R} \ \wedge \ p(a) = 0 \Longleftrightarrow a \in \mathbb{R} \ \wedge \ a^4 - 3a^2 + 2a = 0 \qquad (*)$$

(ii) Si $p(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$ entonces

$$p(x) = x(x^3 - 3x + 2) \Longrightarrow p(0) = 0 \Longrightarrow 0 \in \mathbb{S}$$

(iii) Si llamamos $q(x) = x^3 - 3x + 2$ entonces $p(x) = x \cdot q(x)$ y $q(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$. Así que

$$p(1) = 1 \cdot q(1) = 0 \Longrightarrow 1 \in \mathbb{S}$$

(iv) En particular como $q(1) = 0$ entonces $q(x) = (x-1)h(x)$, para algún polinomio $h(x)$, el cual podemos ubicar dividiendo al polinomio $q(x)$ por el polinomio $x - 1$.

$$\begin{array}{rl}
 & x^3 - 3x + 2 \quad : \quad x - 1 = x^2 + x - 2 \\
(-) & \\
 & x^3 - x^2 \\
 & ------ \\
 & x^2 - 3x + 2 \\
(-) & \\
 & x^2 - x \\
 & ------ \\
 & -2x + 2 \\
(-) & \\
 & -2x + 2 \\
 & ------ \\
 & \quad 0
\end{array}$$

Así que $q(x) = (x-1)\underbrace{(x^2 + x - 2)}_{h(x)}$

(v) Finalmente, $p(x) = x(x-1)h(x)$ y como h(x)=(x-1)(x+2) entonces $p(-2) = 0$ y $-2 \in \mathbb{S}$. Por tanto $\mathbb{S} = \{-2, 0, 1\}$.

(b) Si $\mathbb{S} \neq \emptyset$ entonces escriba el polinomio $p(x)$ como un producto de polinomios de grado 1, es decir como un producto de polinomios de la forma $h(x) = a_0 + a_1x$ con $a_0 \in \mathbb{R}$ y $a_1 \in \mathbb{R}$

Solución
Del punto anterior sigue que $p(x) = x(x-1)^2(x+2)$

[1]Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

(2) Demuestre usando Inducción Matemática que la fórmula:

$F(n): \quad n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible por 3 es verdadera $(\forall n : n \in \mathbb{N})$

Solución

Etapa 1. Por demostrar que $F(1)$ es verdadera.

En efecto

$1^3 + (1+1)^3 + (1+2)^3 = 36 = 3 \cdot 12.$

Luego $F(1)$ es verdadera.

Etapa 2. Hipótesis de Inducción

Supongamos que $F(n)$ es verdadera. e.e. existe q, tal que

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 3 \cdot q \qquad (H)$$

Etapa 3. Tesis de Inducción.

Por demostrar que $F(n+1)$ es verdadera, e.e. existe r, tal que

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = 3 \cdot r$$

En efecto, como

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = 3n^3 + 18n^2 + 42n + 36$$

Y,

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$$

Dividiendo tenemos que,

$$\begin{array}{rl} & 3n^3 + 18n^2 + 42n + 36 \quad : \quad 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 \quad = \quad 1 \\ (-) & \\ & 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 \\ & ----------- \\ & 9n^2 + 27n + 27 \end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= 1 \cdot (3n^3 + 9n^2 + 15n + 9) + 9n^2 + 27n + 27 \\ &\overset{(H)}{=} 3 \cdot q + 3 \cdot (3n^2 + 9n + 9) \\ &= 3\underbrace{(q + 3n^2 + 9n + 9)}_{r} \end{aligned}$$

Luego, $F(n+1)$ es verdadera y $F(n)$ es verdadera $(\forall n : n \in \mathbb{N})$

(3) Si consideramos $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$ tal que verifica simultáneamente las propiedades:

(a) A es una progresión aritmética de diferencia d

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{(d+2a_n)^2}{8d} \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$

Entonces demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot n^2$$

Solución

Etapa 1. Debemos demostrar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot n^2$.

Etapa 2. Gestión de la información

(a) Si A es una progresión aritmética de diferencia d entonces sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \tag{1}$$

(b) Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{(d+2a_n)^2}{8d} \quad (\forall n; n \in \mathbb{N})$ entonces en particular se verifica para $n = 1$, e.e.

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = \frac{(d+2a_1)^2}{8d}$$

Pero

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = \frac{(d+2a_1)^2}{8d} \iff a_1 = \frac{(d+2a_1)^2}{8d} \iff 8da_1 = (d+2a_1)^2 \iff d^2 - 4da_1 + 4a_1^2 = 0$$

Así que,

$$d^2 - 4da_1 + 4a_1^2 = 0 \Longrightarrow d = \frac{4a_1 \pm \sqrt{16a_1^2 - 16a_1^2}}{2} \Longrightarrow d = 2a_1 \tag{2}$$

(c) Finalmente, sustituyendo (2) en (1) tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(d + (n-1)d) = \frac{n}{2} \cdot nd = n^2 \cdot \frac{d}{2} = n^2 a_1$$

(4) Si $n \in \mathbb{N}$ fijo y $(1+2x)(1+x^2)^n = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots) \in \mathbb{R}[x]$ entonces demuestre que

$$a_0 + a_1 - 3 = 0$$

Solución

Etapa 1. Por demostrar que $a_0 + a_1 - 3 = 0$

Etapa 2. Gestión de la información

(a) Por hipótesis sabemos que,

$$(1+2x)(1+x^2)^n \quad = \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{3}$$

(b) Del desarrollo binomial de $(1+x^2)^n$ sigue que

$$(1+x^2)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (x^2)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k} \tag{4}$$

(c) Luego, ponderando el resultado obtenido en (4) por $(1+2x)$ se consigue que,

$$\begin{aligned}
(1+2x)(1+x^2)^n &= (1+2x)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k} + 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k+1} \\
&= \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} x^2 + \binom{n}{2} x^4 + \ldots\right] + 2\left[\binom{n}{0} x + \binom{n}{1} x^3 + \binom{n}{2} x^5 + \ldots\right]
\end{aligned}$$

(d) Así que, de este nuevo cálculo concluimos que

$$(1+2x)(1+x^2)^n \quad = \quad \binom{n}{0} + 2\binom{n}{0} x + \binom{n}{1} x^2 + 2\binom{n}{1} x^3 + \binom{n}{2} x^4 + 2\binom{n}{2} x^5 + \ldots \tag{5}$$

(e) Finalmente de la comparación de 3 y (5), sigue que

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{0} x + \binom{n}{1} x^2 + 2\binom{n}{1} x^3 + \binom{n}{2} x^4 + 2\binom{n}{2} x^5 + \ldots \quad = \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Y de ella se obtiene que:

$$a_0 = \binom{n}{0} = 1 \wedge a_1 = 2\binom{n}{0} = 2 \tag{6}$$

(f) Finalmente de (6) se concluye directamente que.

$$a_0 + a_1 - 3 = 0$$