Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución PAS
Profesor Ricardo Santander Baeza
19 de Julio del 2010

(1.1) Demuestre usando inducción matemática que la fórmula:

$$F(n): \qquad \left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$$

Es verdadera $(\forall n; n\in\mathbb{N})$.

Solución
Por demostrar que $F(1)$ es verdadera
En efecto,

$$\left[\left(1+\frac{1}{1}\right)=2 \quad\wedge\quad 1+1=2\right]\Longrightarrow\left(1+\frac{1}{1}\right)=1+1$$

De donde sigue que $F(1)$ es verdadera.

Hipótesis de Inducción: Supongamos que para algún $m\in\mathbb{N}$ se cumple que $F(m)$ es verdadera. Es decir que

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)=m+1 \qquad (H)$$

Tesis de Inducción: Por demostrar que $F(m+1)$ es verdadera. Es decir, por demostrar que

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{m+1}\right)=m+2$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{m+1}\right) &\overset{(H)}{=} (m+1)\cdot\left(1+\frac{1}{m+1}\right)\\ &= (m+1)\cdot\left(\frac{m+1+1}{m+1}\right)\\ &= (m+2)\end{aligned}$$

Así que $F(m+1)$ verdadera, y entonces $F(n)$ es verdadera $(\forall n; n\in\mathbb{N})$

(1.2) Usando el resultado anterior demuestre que $(\forall n; n\in\mathbb{N})$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{1}{n+n}\right)=\frac{2n+1}{n}$$

Solución

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{1}{n+n}\right) &= \frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{1}{n+n}\right)}{\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}\\ &= \frac{2n+1}{n}\end{aligned}$$

[1]Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

(2) Determine el término que contiene x^{12} en el desarrollo binomial

$$\left(\frac{1}{x^6}+1+x^6\right)\left(2x^3-\frac{1}{x^3}\right)^8$$

Solución

En primer lugar, aplicando el teorema del binomio tenemos que:

$$\begin{aligned}\left(2x^3-\frac{1}{x^3}\right)^8 &= \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}\left(2x^3\right)^{8-k}\left(-\frac{1}{x^3}\right)^k\\ &= \sum_{k=0}^{8}(-1)^k\cdot 2^{8-k}\cdot\binom{8}{k}x^{24-6k}\end{aligned}$$

Así que,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^6}+1+x^6\right)\left(2x^3-\frac{1}{x^3}\right)^8 &= \left(\frac{1}{x^6}+1+x^6\right)\sum_{k=0}^{8}(-1)^k\cdot 2^{8-k}\cdot\binom{8}{k}x^{24-6k}\\ &= \sum_{k=0}^{8}(-1)^k\cdot 2^{8-k}\cdot\binom{8}{k}x^{18-6k}+\sum_{k=0}^{8}(-1)^k\cdot 2^{8-k}\cdot\binom{8}{k}x^{24-6k}+\sum_{k=0}^{8}(-1)^k\cdot 2^{8-k}\cdot\binom{8}{k}x^{30-6k}\end{aligned}$$

Para obtener el término que contiene x^{12} debemos resolver las ecuaciones.

$$\begin{cases}18-6k=12\Longleftrightarrow 6k=6\Leftrightarrow k=1\\ 24-6k=12\Longleftrightarrow 6k=12\Leftrightarrow k=2\\ 30-6k=12\Longleftrightarrow 6k=18\Leftrightarrow k=3\end{cases}$$

Así que, el término pedido es

$$T = -2^7\cdot\binom{8}{1}x^{12}+2^6\cdot\binom{8}{2}x^{12}-2^5\cdot\binom{8}{3}x^{12}=\left(-2^7\cdot\binom{8}{1}+2^6\cdot\binom{8}{2}-2^5\cdot\binom{2}{3}\right)x^{12}$$

(3) En el conjunto $\mathbb{R}-\{0\}$, se define la relación $\Re$ como sigue:

$$x\,\Re\,y\Longleftrightarrow(\exists m;m\in\mathbb{Z})(\exists s;s\in\mathbb{Z}):\frac{x}{y}=\frac{2^s}{3^m}$$

Muestre que $\Re$ es una relación de equivalencia.
Solución
$\Re$ es una relación de equivalencia, si y solo si, es una relación refleja, simétrica y transitiva:

- Para ver la Reflexividad hacemos lo siguiente:

  Dado $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, tenemos que $\frac{x}{x}=\frac{2^0}{3^0}$, $x\Re x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}-\{0\}$ y $\Re$ es refleja.
- Para estudiar la Simetría, suponemos que $x\Re y$

$$\begin{aligned}x\Re y &\Longrightarrow (\exists m;m\in\mathbb{Z}),(\exists s;s\in\mathbb{Z}):\frac{x}{y}=\frac{2^s}{3^m}\\ &\Longrightarrow (\exists m;m\in\mathbb{Z}),(\exists s;s\in\mathbb{Z}):\frac{y}{x}=\frac{3^m}{2^s}\\ &\Longrightarrow (\exists(-m);(-m)\in\mathbb{Z}),(\exists(-s);(-s)\in\mathbb{Z}):\frac{y}{x}=\frac{2^{-s}}{3^{-m}}\end{aligned}$$

  Luego, $y\Re x$, y $\Re$ es un relación simétrica.

- Para estudiar la Transitividad, suponemos que $x\Re y \wedge y\Re z$

$$\begin{array}{rcl} x\Re y \wedge y\Re z & \Longrightarrow & \left[(\exists m; m \in \mathbb{Z})(\exists s; s \in \mathbb{Z}) : \dfrac{x}{y} = \dfrac{2^s}{3^m}\right] \wedge \left[(\exists l; l \in \mathbb{Z})(\exists f; f \in \mathbb{Z}) : \dfrac{y}{z} = \dfrac{2^f}{3^l}\right] \\ & \Longrightarrow & \left[(\exists m; m \in \mathbb{Z})(\exists s; s \in \mathbb{Z})(\exists l; l \in \mathbb{Z})(\exists f; f \in \mathbb{Z}) : \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{y}{z} = \dfrac{2^s}{3^m} \cdot \dfrac{2^f}{3^l}\right] \\ & \Longrightarrow & \left[(\exists (m+l); m \in \mathbb{Z})(\exists (s+f); s \in \mathbb{Z}) : \dfrac{x}{z} = \dfrac{2^{s+f}}{3^{m+l}}\right] \end{array}$$

  Luego, $x\Re z$, y $\Re$ es una relación simétrica. Como $\Re$ es refleja, simétrica y transitiva, entonces es una relación de equivalencia.

(4) Dada la función $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que $h(a,b,c) = (b-a) + (b-\lambda a)x + (c-a+\alpha)x^2$.

Determine el conjunto

$$\mathbb{S} = \{(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid h \text{ sea un Isomorfismo}\}$$

Solución

Recordamos que h es un isomorfismo si y solo si es un homomorfismo biyectivo, es decir, inyectivo y sobreyectivo:

(a) Para que se cumpla la idea de Homomorfismo debería suceder lo siguiente:

$$[u_1 \in \mathbb{R}^3 \wedge u_2 \in \mathbb{R}^3] \Longrightarrow [h(u_1 + u_2) = h(u_1) + h(u_2)]$$

Luego, si $u_1 = (a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ y $u_2 = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\begin{array}{rcl} h(u_1 + u_2) & = & h\left((a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2)\right) \\ & = & h\left(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2\right) \\ & = & [(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)] + [(b_1 + b_2) - \lambda(a_1 + a_2)]\, x + [(c_1 + c_2) - (a_1 + a_2) + \alpha]\, x^2 \\ & = & [(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)] + [(b_1 - \lambda a_1) + (b_2 - \lambda a_2)]\, x + [(c_1 - a_1) + (c_2 - a_2) + \alpha]\, x^2 \\ & = & \left[(b_1 - a_1) + (b_1 - \lambda a_1)x + (c_1 - a_1)x^2\right] + \left[(b_2 - a_2) + (b_2 - \lambda a_2)x + (c_2 - a_2)x^2\right] + \alpha x^2 \end{array}$$

Por otra parte,

$$\begin{array}{rcl} h(u_1) & = & (a_1, b_1, c_1) = (b_1 - a_1) + (b_1 - \lambda a_1)x + (c_1 - a_1)x^2 + \alpha x^2 \\ h(u_2) & = & (a_2, b_2, c_2) = (b_2 - a_2) + (b_2 - \lambda a_2)x + (c_2 - a_2)x^2 + \alpha x^2 \end{array}$$

Luego,

$$h(u_1) + h(u_2) \ = \ (b_1 - a_1) + (b_1 - \lambda a_1)x + (c_1 - a_1)x^2 + (b_2 - a_2) + (b_2 - \lambda a_2)x + (c_2 - a_2)x^2 + 2\alpha x^2$$

Por tanto

$$h(u_1 + u_2) = h(u_1) + h(u_2) \Longleftrightarrow 2\alpha x^2 = \alpha x^2 \Longleftrightarrow \alpha = 0$$

Finalmente, h es un homomorfismo $(\forall (\lambda, 0); \lambda \in \mathbb{R})$
Solución Alternativa para esta parte,

$$\begin{array}{rcl} h \text{ homomorfismo} & \Longrightarrow & h(0,0,0) = 0 + 0x + 0x^2 \\ & \Longrightarrow & (0-0) + (0 - \lambda \cdot 0)x + (0 - 0 + \alpha)x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\ & \Longrightarrow & 0 + 0x + \alpha x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\ & \Longrightarrow & \alpha = 0 \end{array}$$

(b) Para estudiar la Inyectividad, hacemos uso de la condición de que $\alpha = 0$, y entonces "tenemos derecho" a analizar el $\ker h$:

$$\begin{aligned}
u \in \ker h &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge h(u) = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \\
&\iff u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \wedge h(a,b,c) = 0 + 0x + 0x^2 \\
&\iff u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \wedge (b-a) + (b-\lambda a)x + (c-a+\alpha)x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\
&\iff u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \wedge \left.\begin{array}{rcl} b-a &=& 0 \\ b-\lambda a &=& 0 \\ c-a &=& 0 \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \wedge \left.\begin{array}{rcl} b &=& a \\ (1-\lambda)a &=& 0 \\ c &=& a \end{array}\right| \\
&\Longrightarrow u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \wedge (a = b = c) \wedge (a = 0 \vee \lambda = 1)
\end{aligned}$$

Ahora, si $\lambda = 1$ entonces $a \in \mathbb{R}$ y $\ker(h) = \{(a,a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ y h no es inyectiva.

Así que

$$h \text{ inyectiva} \iff \ker(h) = \{(0,0,0)\} \iff \lambda \neq 1$$

(c) Para estudiar la sobreyectividad suponemos que $\alpha = 0$ y $\lambda \neq 1$ y verificamos las condiciones para que dado cualquier $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ tenga solución en $\mathbb{R}^3$ la ecuación $h(u) = p(x)$
Pues bien supongamos que $u = (a,b,c)$ es un candidato a solución y estudiemos su viabilidad.

$$\begin{aligned}
h(a,b,c) = a_0 + a_1x + a_2x^2 &\iff (b-a) + (b-\lambda a)x + (c-a+\alpha)x^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2 \\
&\iff \left.\begin{array}{rrcl} (1) & b-a &=& a_0 \\ (2) & b-\lambda a &=& a_1 \\ (3) & c-a &=& a_2 \end{array}\right| \overset{(1)-(2)}{\Longrightarrow} (\lambda - 1)a = a_0 - a_1 \\
&\iff a = \frac{a_0 - a_1}{\lambda - 1} \wedge b = a_0 + \frac{a_0 - a_1}{\lambda - 1} \wedge c = a_2 + \frac{a_0 - a_1}{\lambda - 1}
\end{aligned}$$

Así que existe $u = \left(\frac{a_0 - a_1}{\lambda - 1}, a_0 + \frac{a_0 - a_1}{\lambda - 1}, a_2 + \frac{a_0 - a_1}{\lambda - 1}\right) \in \mathbb{R}^3$ tal que $h(u) = p(x)$, es decir.

$$h\left(\frac{a_0 - a_1}{\lambda - 1}, a_0 + \frac{a_0 - a_1}{\lambda - 1}, a_2 + \frac{a_0 - a_1}{\lambda - 1}\right) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

De esta forma, h es un isomorfismo, si y solo si, $\alpha = 0$ y $\lambda \neq 1$ y

$$\mathbb{S} = \{(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid h \text{ sea un Isomorfismo}\} = (\mathbb{R} - \{1\}) \times \{0\}$$