Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución del Examen 2
Profesor Ricardo Santander Baeza
07 de Marzo del 2011

[1] Dado el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} (1-a)x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & (2-a)x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & (1-a)x_3 & = & 0 \end{array}\right| \qquad (\star)$$

Determine el conjunto

$$\mathbb{S} \;=\; \{a \in \mathbb{R} \mid (\star) \text{ tiene infinitas soluciones}\}$$

Solución

Etapa 1. $(\star)$ tiene solución única $\Longleftrightarrow \rho(A) < 3$

Etapa 2. Escalonamos A.

$$\begin{bmatrix} (1-a) & -1 & 1 \\ 2 & (2-a) & 2 \\ 1 & 1 & (1-a) \end{bmatrix} \begin{array}{l} (l_1 \to l_1 - (1-a)l_3) \\ (l_2 \to l_2 - 2l_3) \end{array} \begin{bmatrix} 0 & -2+a & 1-(1-a)^2 \\ 0 & -a & 2a \\ 1 & 1 & (1-a) \end{bmatrix} = A_E$$

Caso 1. $a = 0$ entonces A_E se transforma en

$$A_E = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (l_1 \leftrightarrow l_3) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} (l_1 \leftrightarrow l_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, $0 \in \mathbb{S}$

Caso 2. $a \neq 0$ entonces en A_E hacemos operaciones elementales

$$\begin{bmatrix} 0 & -2+a & 1-(1-a)^2 \\ 0 & -a & 2a \\ 1 & 1 & (1-a) \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} (l_1 \leftrightarrow l_3) \\ (l_2 \to -\frac{1}{a}l_2) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & (1-a) \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2+a & 1-(1-a)^2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (l_1 \leftrightarrow l_1 - l_2) \\ (l_3 \to l_3 - (a-2)al_2) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & (3-a) \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & (1-(1-a)^2 + 2(a-2)) \end{bmatrix}$$

En este caso, $(\star)$ tiene solución si y sólo si $(1-(1-a)^2 + 2(a-2)) = 0$. Pero,

$$1-(1-a)^2 + 2(a-2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a-2)^2 = 0 \Longleftrightarrow a = 2$$

Así que $\mathbb{S} = \{0, 2\}$

[1]Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

[2] En $\mathbb{R}_2[x]$, si definimos el producto interno $\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$ y $\mathbb{W} = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = p(1) + p(-1)\}$ entonces

(a) Demuestre que $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}_2[x]$

Solución

En primer lugar, si $p(x) = 0 + 0x + 0x^2$ entonces $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y

$$\begin{aligned} p(1) + p(-1) &= (0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1^2) + (0 + 0\cdot(-1) + 0\cdot(-1)^2) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0^2 \\ &= p(0) \end{aligned}$$

Luego, $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 \in \mathbb{W}$ y $\mathbb{W} \neq \emptyset$
En segundo lugar,

$$\begin{aligned} p(x) \in \mathbb{W} &\iff p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \ \wedge \ p(0) = p(1) + p(-1) \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \ \wedge \ a_0 = (a_0 + a_1 + a_2) + (a_0 - a_1 + a_2) \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \ \wedge \ a_0 = 2a_0 + 2a_2 \\ &\iff p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \ \wedge \ a_0 = -2a_2 \\ &\iff p(x) = -2a_2 + a_1x + a_2x^2 \wedge a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \in \mathbb{R} \\ &\iff p(x) = a_1x + a_2(x^2 - 2) \wedge a_1 \in \mathbb{R} \wedge a_2 \in \mathbb{R} \\ &\iff p(x) \in \langle\{x, x^2 - 2\}\rangle \end{aligned}$$

Así que

$$\mathbb{W} = \langle\{x, x^2 - 2\}\rangle \leq \mathbb{R}_2[x]$$

(b) Determine una base ortogonal respecto del producto interno definido encima, para $\mathbb{W}$

En primer lugar, debemos verificar si $\alpha = \{x, x^2 - 2\}$ es o no es una base para $\mathbb{W}$. Por lo pronto ya es un sistema de generadores $\mathbb{W}$, así que sólo resta estudiar su independencia lineal.

$$\begin{aligned} c_1x + c_2(x^2 - 2) = 0 + 0x + 0x^2 &\implies -2c_2 + c_1x + c_2x^2 = 0 + 0x + 0x^2 \\ &\implies c_2 = c_1 = 0 \end{aligned}$$

Luego α es una base para $\mathbb{W}$.

En segundo, debemos verificar si α es o no una base ortogonal.

$$\langle x, x^2 - 2\rangle = 0\cdot(0^2 - 2) + 1\cdot(1^2 - 2) + 2\cdot(2^2 - 2) = 0 + (-1) + 4 = 3$$

Por tanto, debemos ortogonalizar la base α, aplicando Gram Schmidt.

Si $v_1' = x$ entonces

$$v_2' = x^2 - 2 - \frac{\langle x^2 - 2, x\rangle}{\langle x, x\rangle}\, x = x^2 - 2 - \frac{3}{5}x$$

Luego, $\alpha' = \left\{x, -2 - \frac{3}{5}x + x^2\right\}$ es una base ortogonal para $\mathbb{W}$.

En efecto

$$
\begin{aligned}
\left\langle x, -2-\frac{3}{5}x+x^2\right\rangle &= 0(-2)+1\left(-2-\frac{3}{5}+1\right)+2\left(-2-\frac{6}{5}+4\right)\\
&= \left(-1-\frac{3}{5}\right)+\left(4-\frac{12}{5}\right)\\
&= 3-\left(\frac{15}{5}\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

[3] Sea $T:\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)$ tal que $T(x,y,z)=\begin{pmatrix} x+y+z\\ x-y+z\\ x-z\end{pmatrix}$. Demuestre que T es un isomorfismo.

Solución

Etapa 1. P.d.q. $T\in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))$

Sean $u=(x_1,y_1,z_1)\in\mathbb{R}^3$ y $v=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$. P.d.q. $T(u+v)=T(u)+T(v)$

$$
\begin{aligned}
T(u+v) &= T(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)=\begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2\\ x_1+x_2-(y_1+y_2)+z_1+z_2\\ x_1+x_2-(z_1+z_2)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2\\ x_1+x_2-y_1-y_2+z_1+z_2\\ x_1+x_2-z_1-z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1\\ x_1-y_1+z_1\\ x_1-z_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_2+y_2+z_2\\ x_2-y_2+z_2\\ x_2-z_2\end{pmatrix}\\
&= T(x_1,y_1,z_1)+T(x_2,y_2,z_2)=T(u)+T(v)
\end{aligned}
$$

Sean $u=(x_1,y_1,z_1)\in\mathbb{R}^3$ y $\lambda\in\mathbb{R}$. P.d.q. $T(\lambda u)=\lambda T(u)$

$$
\begin{aligned}
T(\lambda u) &= T(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)=\begin{pmatrix} \lambda x_1+\lambda y_1+\lambda z_1\\ \lambda x_1-\lambda y_1+\lambda z_1\\ \lambda x_1-\lambda z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda(x_1+y_1+z_1)\\ \lambda(x_1-y_1+z_1)\\ \lambda(x_1-z_1)\end{pmatrix}\\
&= \lambda\begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1\\ x_1-y_1+z_1\\ x_1-z_1\end{pmatrix}=\lambda T(x_1,y_1,z_1)=\lambda T(u)
\end{aligned}
$$

Luego, $T\in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))$

Etapa 2. Como $\dim_{\mathbb{R}}(R^3)=\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1))=3$ entonces sabemos que T inyectiva si y sólo si T sobreyectiva. Así que

$$
\begin{aligned}
u \in \ker(T) &\iff u \in \mathbb{R}^3 \wedge T(u) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)} \\
&\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge T(x, y, z) = 0_{\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(3\times 1)} \\
&\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y + z \\ x - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \wedge x = z = y = 0 \\
&\iff u = (0, 0, 0)
\end{aligned}
$$

Luego, $\ker(T) = \{(0, 0, 0)\}$ y T inyectiva, y por lo afirmado encima T es un isomorfismo.

[4] Sea $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V})$ y $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{V}$ tal que $\mathbb{V} = \langle\{v_1, v_2, v_3\}\rangle$. Demuestre que

$$T \text{ sobreyectiva } \Longrightarrow \mathbb{V} = \langle\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}\rangle$$

Solución

- Si $u \in \mathbb{V}$ entonces como $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V})$ y es sobreyectiva entonces existe $w \in \mathbb{V}$ tal que

$$T(w) = u \tag{1}$$

- Esta es la idea clave, pues como $w \in \mathbb{V}$ y este a su vez es generado por $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ entonces existen escalares a_1, a_2 y a_3 tales que

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \tag{2}$$

- Sustituyendo, el valor de w en (2) en (1) obtenemos que

$$\left.\begin{aligned} u &= T(w) \\ &= T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3) \\ &= a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + a_3 T(v_3) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow u \in \langle\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}\rangle \tag{3}$$

  Por tanto hemos demostrado que

$$\mathbb{V} \subset \langle\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}\rangle \tag{4}$$

- Finalmente como, $T \in \mathbb{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{V})$ y $v_i \in \mathbb{V}$ para $i = 1, 2, 3$ entonces $T(v_i) \in \mathbb{V}$ para $i = 1, 2, 3$, lo que significa que

$$\langle\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}\rangle \subset \mathbb{V} \tag{5}$$

  Así que de (4) e (5) sigue que

$$\mathbb{V} = \langle\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}\rangle$$