Universidad de Santiago de Chile
Departamento de Matemática y C.C.
Ingeniería Civil

Álgebra[1] - Solución Examen 1
Profesor Ricardo Santander Baeza
Profesora Inge Alicera
20 de Diciembre del 2010

[1] Si considera en $\mathbb{R}_2[x]$ las siguientes bases

$$\alpha = \{x, x^2, x^2-1\} \;\; y \;\; \beta = \{x-1, x+2, x^2-1\} \text{ entonces}$$

(a) Determine $[I]_\alpha^\beta$

(b) Encuentre $[I]_\alpha^\beta [x^2+x+3]_\alpha$

Solución: Calculemos Primero $[I]_\alpha^\beta = \Big([x]_\beta, \big[x^2\big]_\beta, \big[x^2-1\big]_\beta\Big)$

$[x]_\beta = a(x-1)+b(x+2)+c(x^2-1) = 2b-a-c+(a+b)x+cx^2$

$$\begin{aligned} 2b-a-c &= 0 \\ (a+b) &= 1 \\ c &= 0 \end{aligned} \;\text{, Solución es: } \left[a=\frac{2}{3}, b=\frac{1}{3}, c=0\right]$$

$\big[x^2\big]_\beta = a(x-1)+b(x+2)+c(x^2-1) = 2b-a-c+(a+b)x+cx^2$

$$\begin{aligned} 2b-a-c &= 0 \\ (a+b) &= 0 \\ c &= 1 \end{aligned} \;\text{, Solución es: } \left[a=-\frac{1}{3}, b=\frac{1}{3}, c=1\right]$$

$\big[x^2-1\big]_\beta = a(x-1)+b(x+2)+c(x^2-1) = 2b-a-c+(a+b)x+cx^2$

$$\begin{aligned} 2b-a-c &= -1 \\ (a+b) &= 0 \\ c &= 1 \end{aligned} \;\text{, Solución es: } [a=b=0, c=1]$$

Luego la matriz cambio de base es: $[I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Así para encontrar $[I]_\alpha^\beta \big[x^2+x+3\big]_\alpha$

$\big(x^2+x+3\big) = ax+bx^2+c(x^2-1) = bx^2-c+cx^2+ax$

$$\begin{aligned} -c &= 3 \\ a &= 1 \\ b+c &= 1 \end{aligned} \;\text{, Solución es: } [a=1, b=4, c=-3]$$

Luego $\quad \big[x^2+x+3\big]_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ y

$$[I]_\alpha^\beta \big[x^2+x+3\big]_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

[2] Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & -\lambda-1 \\ -x & + & (\lambda-3)y & - & z & = & \lambda \\ -\lambda x & - & (\lambda+2)z & + & (\lambda+1)w & = & \lambda \\ w & & & & & = & -2 \end{array}\right| \qquad (*)$$

[1] Cada problema vale 1.5 puntos
Tiempo 120'

Determine los siguientes conjuntos

(a) $S_1 = \{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, (*) \text{ tiene solución}\}$
(b) $S_2 = \{\lambda \in \mathbb{R} |\, (*) \text{ no tiene solución }\}$

Solución:

La matriz ampliada de este sistema es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda-1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & -\lambda-2 & \lambda+1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Escalonando obtenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda-1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & -\lambda-2 & \lambda+1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} l_2 \longleftrightarrow l_2 + l_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda-1 \\ 0 & \lambda-3 & -1 & 0 & -1 \\ -\lambda & 0 & -\lambda-2 & \lambda+1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$l_3 \longleftrightarrow l_3 + \lambda l_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda-1 \\ 0 & \lambda-3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda-2 & \lambda+1 & \lambda-\lambda(\lambda+1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Si $\lambda = 3$ en $(**)$. Se tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} l_2 \quad \longleftrightarrow \quad -l_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} l_3 \longleftrightarrow l_3 + 5l_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego, el sistema no tiene solución, pues $\rho(A) \neq \rho(A|B)$, es decir $3 \in S_2$

Si $\lambda \neq 3$ en $(**)$. Seguimos escalonando, es decir obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda-1 \\ 0 & \lambda-3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda-2 & \lambda+1 & \lambda-\lambda(\lambda+1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} l_2 \longleftrightarrow \frac{1}{\lambda-3} l_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda-1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\lambda-3} & 0 & -\frac{1}{\lambda-3} \\ 0 & 0 & -\lambda-2 & \lambda+1 & \lambda-\lambda(\lambda+1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (***)$$

Si $\lambda = -2$ en $(***)$ obtenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda-1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego, el sistema no tiene solución, pues $\rho(A) \neq \rho(A|B)$, es decir $-2 \in S_2$

Si $\lambda \neq -2$ en $(***)$ seguimos escalonando

$$l_3 \longleftrightarrow \tfrac{1}{-(\lambda+2)} l_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda-1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\lambda-3} & 0 & -\frac{1}{\lambda-3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda+1}{-(\lambda+2)} & \frac{\lambda-\lambda(\lambda+1)}{-(\lambda+2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$l_2 \longleftrightarrow l_2 + \frac{1}{\lambda-3} l_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda-1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda-3}+\frac{1}{\lambda-3}\left(\frac{\lambda-\lambda(\lambda+1)}{-(\lambda+2)}\right) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda+1}{-(\lambda+2)} & \frac{\lambda-\lambda(\lambda+1)}{-(\lambda+2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} l_3 \longleftrightarrow l_3 + \frac{\lambda+1}{(\lambda+2)} l_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda-1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda-3}+\frac{1}{\lambda-3}\left(\frac{\lambda-\lambda(\lambda+1)}{-(\lambda+2)}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda-\lambda(\lambda+1)}{-(\lambda+2)} - 2\frac{\lambda+1}{(\lambda+2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

(a) $S_1 = \mathbb{R} - \{-2\} \cup \{3\}$
(b) $S_2 = \{-2\} \cup \{3\}$

[3] Si $W = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a-b = c+d\} \leq \mathbb{R}^4$. Usando el producto interno usual

a) Determine P_W.
b) Calcule $d((1,0,0,0), W)$.

Solución:

Primero debemos determinar quienes son los generadores de W.

$$\begin{aligned} u \in W &\iff u = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \wedge a-b = c+d \\ &\iff u = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \wedge a = b+c+d \\ &\iff u = (b+c+d, b, c, d) \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \wedge d \in \mathbb{R} \\ &\iff u = b\,(1,1,0,0) + c\,(1,0,1,0) + d\,(1,0,0,1) \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R} \wedge d \in \mathbb{R} \\ &\iff u\,\langle\{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1)\}\rangle \end{aligned}$$

Luego $W = \langle\{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1)\}\rangle$
donde $\{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1)\}$ es base de W pero no es ortogonal, por lo tanto debemos ortogonalizarla recordando el producto interno dado

$$\begin{aligned} w_1 &= (1,1,0,0) \\ w_2 &= (1,0,1,0) - \frac{\langle (1,0,1,0), (1,1,0,0)\rangle}{\langle (1,1,0,0), (1,1,0,0)\rangle}(1,1,0,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) \\ w_3 &= (1,0,0,1) - \frac{\left\langle (1,0,0,1), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)\right\rangle}{\left\langle (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)\right\rangle}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) - \frac{\langle (1,0,0,1), (1,1,0,0)\rangle}{\langle (1,1,0,0), (1,1,0,0)\rangle}(1,1,0,0) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} P_W(a,b,c) &= \frac{\langle (a,b,c,d), (1,1,0,0)\rangle}{\langle (1,1,0,0), (1,1,0,0)\rangle}(1,1,0,0) + \frac{\left\langle (a,b,c,d), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)\right\rangle}{\left\langle (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)\right\rangle}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) + \\ &\quad \frac{\left\langle (a,b,c,d), (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)\right\rangle}{\left\langle (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1), (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)\right\rangle}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)\right) \\ &= \left(\frac{3a+b+c+d}{4}, \frac{a+3b-c-d}{4}, \frac{a-b+3c-d}{4}, \frac{a-b-c+3d}{4}\right) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$d(1,0,0,0) = \left\| (1,0,0,0) - \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \right\| = \left\| \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \right\| = \frac{1}{2}$$

[4] Si se considera $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^t = A\} \leq M_2(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y definimos $T : W \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(A) = (tr(A), tr(AM), tr(AN))$ entonces demuestre que T es un isomorfismo.

Solución: Observamos que

$$\begin{aligned}
A\in W &\iff A\in M_R(2)\wedge A^t=A \iff A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_R(2)\wedge \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\\
&\iff A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_R(2)\wedge \begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\iff A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_R(2)\wedge b=c
\end{aligned}$$

Luego,

$$W = \left\{A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix} \mid a\in\mathbb{R}\wedge b\in\mathbb{R}\wedge d\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$$

Además si,

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow a=b=d=0$$

Por tanto $\dim_{\mathbb{R}}(W)=3$

Ahora podemos intentar conocer mejor T, así para $A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}\in W$, tenemos que

$$\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix} &= \left(tr\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}, tr\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}, tr\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)\\
&= \left(tr\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}, tr\begin{pmatrix} a-b & 0\\ b-d & 0\end{pmatrix}, tr\begin{pmatrix} b & 0\\ d & 0\end{pmatrix}\right)\\
&= (a+d,a-b,b)
\end{aligned}$$

Para verificar si T es o no un isomorfismo debemos verificar primero que T es transformación lineal entonces dados $A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}\in W$, $B=\begin{pmatrix} x & y\\ y & w\end{pmatrix}\in W$ y $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y\\ y & w\end{pmatrix}\right) &= T\left(\begin{pmatrix} a+x & b+y\\ b+y & d+w\end{pmatrix}\right)=(a+d+x+w,a-b+x-y,b+y)\\
&= T\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix} x & y\\ y & w\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Y,

$$T\left(\lambda\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}\right) = (\lambda a+\lambda d,\lambda a-\lambda b,\lambda b)=\lambda T\left(\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}\right)$$

Luego, T es una transformación lineal

Determinemos el $\ker(T)$, para verificar la inyectividad de T.

$$\begin{aligned}
A\in\ker(T) &\iff A\in W\wedge T(A)=0_{\mathbb{R}^3}\iff A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}\in W\wedge T\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}=(0,0,0)\\
&\iff A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}\in W\wedge(a-d,a-b,b)=(0,0,0)\\
&\iff A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & d\end{pmatrix}\in W\wedge a=b=d=0\\
&\iff A=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego $Ker(T)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.

Así T es inyectiva y como $dim_{\mathbb{R}}(W)=dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)=3$ entonces por el Teorema de la Dimensión, T es también sobreyectiva i entonces un isomorfismo.