



Ricardo Santander Baeza

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación
Universidad de Santiago de Chile

Agosto 2008



El Plano Cartesiano

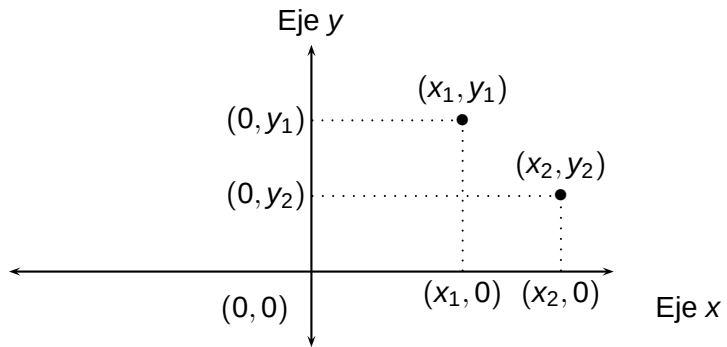
El ambiente de trabajo será el plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$, es decir

$$u \in \mathbb{R}^2 \iff u = (x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}$$

Y la necesaria forma de diferenciar los elementos del plano.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

Y su diseño es el tradicional:



- Aplicamos el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo PRQ para obtener la representación formulística:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 \iff \overline{PQ} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Y obtenemos la Distancia de P a Q

Definición

Llamaremos *distancia del punto P al punto Q* , en símbolos $d(P, Q)$ a:

$$d(P, Q) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Ejemplo

$$\blacksquare d((2, 3), (1, 4)) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{2}$$

$$\blacksquare d((4, 2), (0, 0)) = \sqrt{(4 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\blacksquare d((2, 3), (2, 3)) = \sqrt{(2 - 2)^2 + (3 - 3)^2} = 0$$

Lema

La distancia definida verifica las siguientes propiedades:

■ $d(P, Q) \geq 0$ y $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$

■ $d(P, Q) = d(Q, P)$

■ $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$

Ejercicios Propuestos

1. Calcule la distancia entre los puntos que se proponen:

(a) $d((4, 1), (1, -2))$ (b) $d((1, 0), (0, 1))$ (c) $d((1, 1), (5, -1))$

2. Determine y grafique el conjunto $\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (0, 0)) = 4\}$

3. Determine y grafique el conjunto $\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (0, 0)) = 0\}$

4. Determine el conjunto $\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (0, 0)) = -1\}$

Línea Recta

Definición

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ y $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}$. Llamaremos línea recta al conjunto de puntos del plano:

$$L(x) = \{(x, y) \mid y = ax + b; x \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}\} \quad (1)$$

Al gráfico de (1) lo notaremos como

$$L : y = ax + b \quad (2)$$

A la ecuación $y = ax + b$ definida en (2) la llamaremos ecuación canónica de la recta.

Ejemplo

◆ $I(x) = 3$

◆ $I(x) = 5x$

◆ $I(x) = -2x + 4$

Requerimientos

Si $y = ax + b$ tal que $x \in U \subseteq \mathbb{R}$ es una linea recta entonces para determinarla completamente basta con conocer sus elementos esenciales, es decir, $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$.

$$a = 0$$

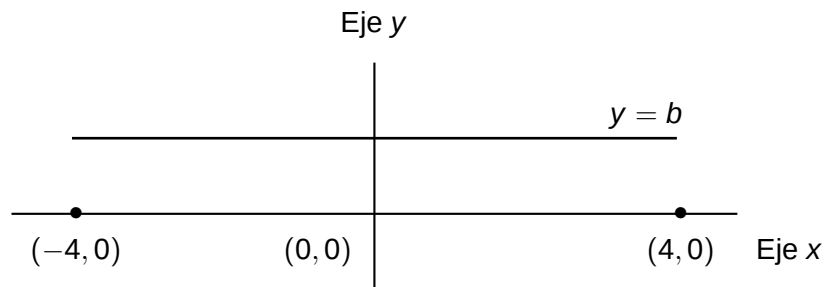
Entonces $y = b$ para $x \in \mathbb{U}$, y su gráfico es el conjunto:

$$C(x) = \{(x, y) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R} \mid y = b\} \quad (3)$$

Así que tenemos tres casos posibles, según $b > 0 \vee b = 0 \vee b < 0$.

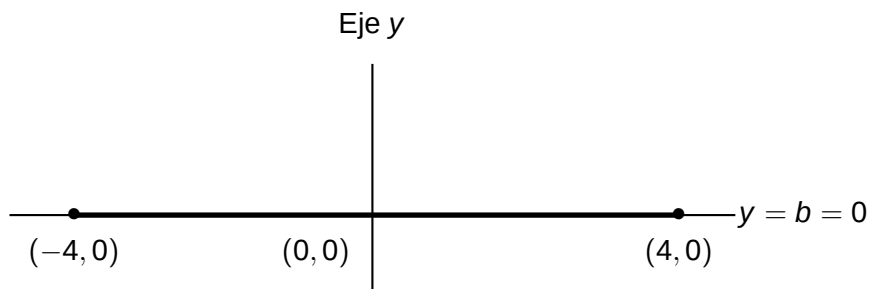
$$\mathbb{U} = [-4, 4] \wedge a = 0 \wedge (b > 0)$$

$$\mathbb{U} = [-4, 4] \wedge a = 0 \wedge (b > 0)$$



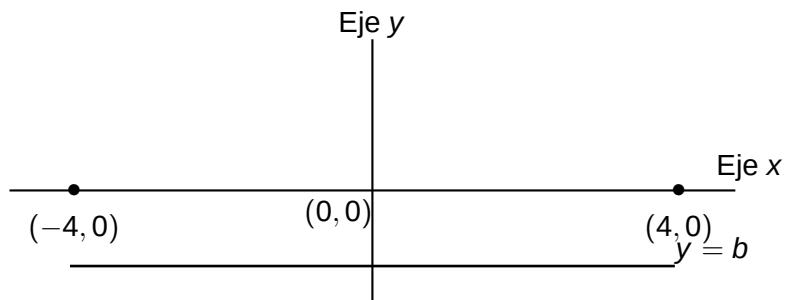
$$\mathbb{U} = [-4, 4] \wedge a = 0 \wedge (b = 0)$$

$$\mathbb{U} = [-4, 4] \wedge a = 0 \wedge (b = 0)$$



$$\mathbb{U} = [-4, 4] \wedge a = 0 \wedge (b < 0)$$

$$\mathbb{U} = [-4, 4] \wedge a = 0 \wedge (b < 0)$$



$$a \neq 0$$

Entonces su gráfico es el conjunto

$$L(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$$

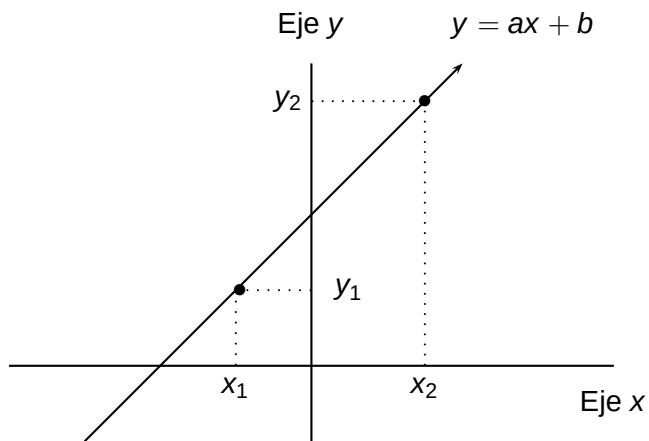
Y como $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces tenemos dos subcasos:

$$a > 0$$

$$x_1 < x_2 \implies ax_1 < ax_2 \implies y_1 = ax_1 + b < y_2 = ax_2 + b$$

$$a > 0$$

$$x_1 < x_2 \implies ax_1 < ax_2 \implies y_1 = ax_1 + b < y_2 = ax_2 + b$$

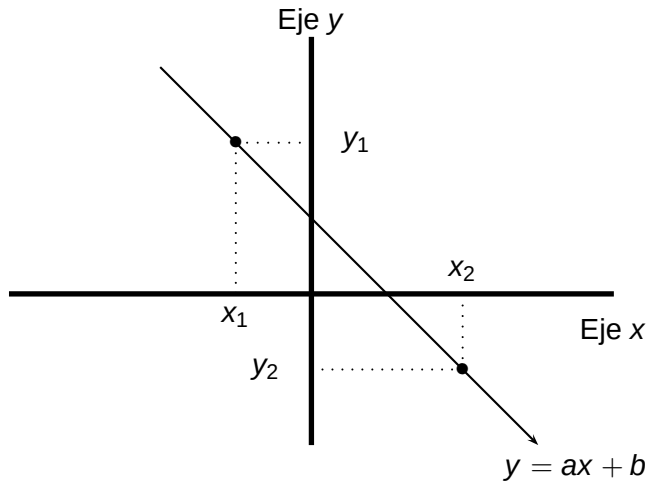


$$a < 0$$

$$x_1 < x_2 \implies ax_1 > ax_2 \implies y_1 = ax_1 + b > y_2 = ax_2 + b$$

$$a < 0$$

$$x_1 < x_2 \implies ax_1 > ax_2 \implies y_1 = ax_1 + b > y_2 = ax_2 + b$$



Fórmula Proposicional Básica

$$u \in L \iff u = (x_0, y_0) \wedge y_0 = ax_0 + b \quad (4)$$

Fórmula Proposicional Básica

$$u \in L \iff u = (x_0, y_0) \wedge y_0 = ax_0 + b \quad (4)$$

Por ejemplo, si $L : y = 2x - 1$ entonces

Fórmula Proposicional Básica

$$u \in L \iff u = (x_0, y_0) \wedge y_0 = ax_0 + b \quad (4)$$

Por ejemplo, si $L : y = 2x - 1$ entonces

(i) $(2, 3) \in L$, pues $3 = 2 \cdot 2 - 1$

Fórmula Proposicional Básica

$$u \in L \iff u = (x_0, y_0) \wedge y_0 = ax_0 + b \quad (4)$$

Por ejemplo, si $L : y = 2x - 1$ entonces

(i) $(2, 3) \in L$, pues $3 = 2 \cdot 2 - 1$

(ii) $(3, 2) \notin L$, pues $2 \neq 2 \cdot 3 - 1 = 5$

Observación

Si consideramos la recta $L : y = ax + b$ y los puntos $P \in \mathbb{R}^2$ y $Q \in \mathbb{R}^2$ tal que $P \neq Q$ entonces

$$P \in L \iff P = (x_1, y_1) \wedge y_1 = ax_1 + b$$

$$Q \in L \iff Q = (x_2, y_2) \wedge y_2 = ax_2 + b$$

Así que,

$$P \in L \wedge Q \in L \iff \left[\begin{array}{l} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{array} \right]$$

$$\implies y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2)$$

$$\implies a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}; \quad x_1 \neq x_2$$

Además sustituyendo en la primera ecuación el valor de a tenemos que

$$y_1 = ax_1 + b \iff b = y_1 - ax_1$$

$$\iff b = y_1 - \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right) x_1$$

$$\iff b = \frac{y_1(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)x_1}{x_1 - x_2}$$

$$\iff b = \frac{y_1x_1 - y_1x_2 - y_1x_1 + y_2x_1}{x_1 - x_2}$$

$$\iff b = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1 - x_2}$$

Conclusión

De la observación anterior sigue que, dados $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ y $P \neq Q$ entonces existe una única recta L que pasa por P y Q cuya ecuación canónica es de la forma;

$$y = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right) x + \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 - x_2} \quad (x_1 \neq x_2) \quad (5)$$

Definición

$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ($x_1 \neq x_2$) se llama la pendiente de la recta L

Ejemplo

Determinemos y grafiquemos la recta que pasa por los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (-3, 5)$

Ejemplo

Determinemos y grafiquemos la recta que pasa por los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (-3, 5)$

♦ Sea $L : y = ax + b$ la recta pedida

Ejemplo

Determinemos y grafiquemos la recta que pasa por los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (-3, 5)$

- ♦ *Sea $L : y = ax + b$ la recta pedida*
- ♦ *Ahora gestionando la información se obtiene que:*

Ejemplo

Determinemos y grafiquemos la recta que pasa por los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (-3, 5)$

♦ Sea $L : y = ax + b$ la recta pedida

♦ Ahora gestionando la información se obtiene que:

► $(1, 2) \in L \iff 2 = a \cdot 1 + b$

Ejemplo

Determinemos y grafiquemos la recta que pasa por los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (-3, 5)$

♦ Sea $L : y = ax + b$ la recta pedida

♦ Ahora gestionando la información se obtiene que:

► $(1, 2) \in L \iff 2 = a \cdot 1 + b$

► $(-3, 5) \in L \iff 5 = a \cdot (-3) + b$

◆ Operando adecuadamente se consigue que:

◆ Operando adecuadamente se consigue que:

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & a + b \\ 5 & = & -3a + b \end{array} \quad \Rightarrow \quad -3 = 4a \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$$

◆ Operando adecuadamente se consigue que:

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & a + b \\ 5 & = & -3a + b \end{array} \quad \Rightarrow \quad -3 = 4a \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$$

◆ Sustituyendo el valor de a obtenemos el valor de b

◆ Operando adecuadamente se consigue que:

$$\left| \begin{array}{rcl} 2 & = & a + b \\ 5 & = & -3a + b \end{array} \right| \implies -3 = 4a \iff a = -\frac{3}{4}$$

◆ Sustituyendo el valor de a obtenemos el valor de b

$$b + a = 2 \implies b = 2 + \frac{3}{4} \implies b = \frac{11}{4}$$

◆ Operando adecuadamente se consigue que:

$$\left| \begin{array}{rcl} 2 & = & a + b \\ 5 & = & -3a + b \end{array} \right| \implies -3 = 4a \iff a = -\frac{3}{4}$$

◆ Sustituyendo el valor de a obtenemos el valor de b

$$b + a = 2 \implies b = 2 + \frac{3}{4} \implies b = \frac{11}{4}$$

◆ Para concluir, sustituyendo en L tenemos que la ecuación pedida es:

◆ Operando adecuadamente se consigue que:

$$\left| \begin{array}{rcl} 2 & = & a + b \\ 5 & = & -3a + b \end{array} \right| \implies -3 = 4a \iff a = -\frac{3}{4}$$

◆ Sustituyendo el valor de a obtenemos el valor de b

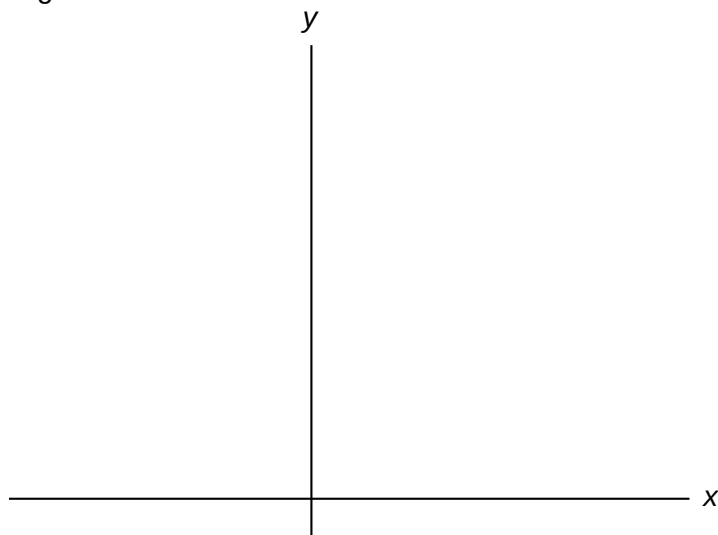
$$b + a = 2 \implies b = 2 + \frac{3}{4} \implies b = \frac{11}{4}$$

◆ Para concluir, sustituyendo en L tenemos que la ecuación pedida es:

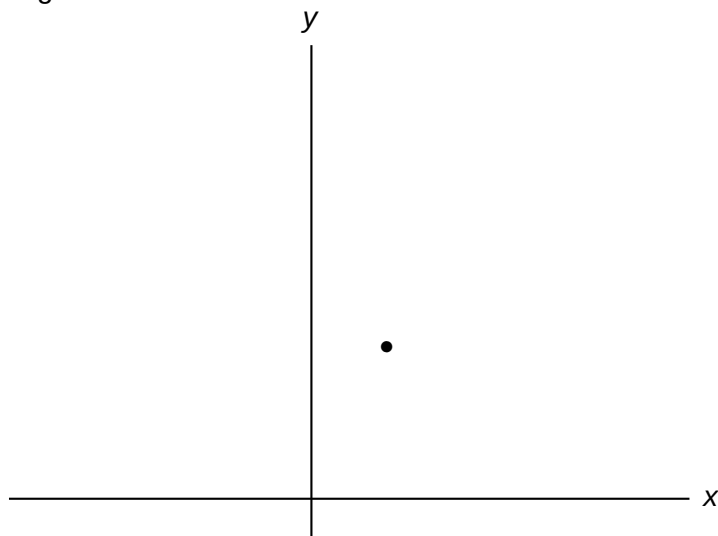
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4} \iff 4y + 3x - 11 = 0$$

◆ Finalmente graficamos la recta obtenida

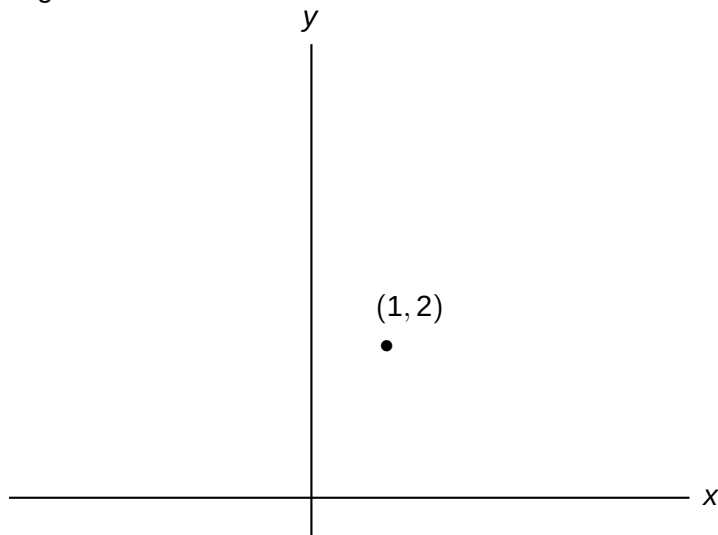
◆ Finalmente graficamos la recta obtenida



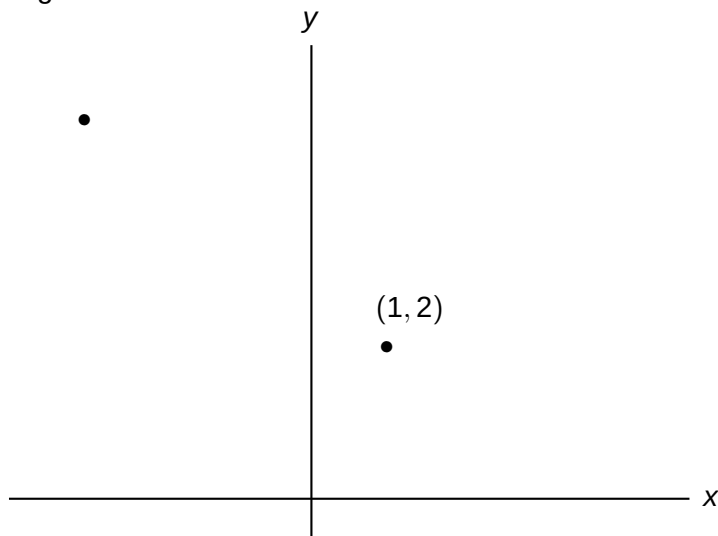
◆ Finalmente graficamos la recta obtenida



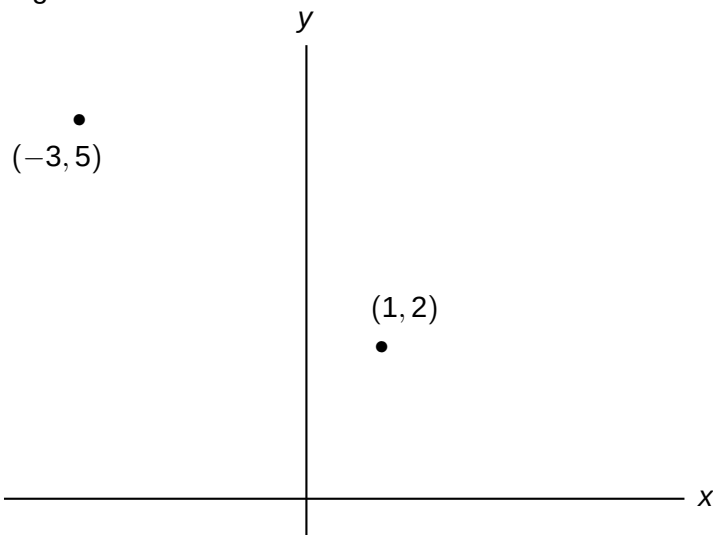
◆ Finalmente graficamos la recta obtenida



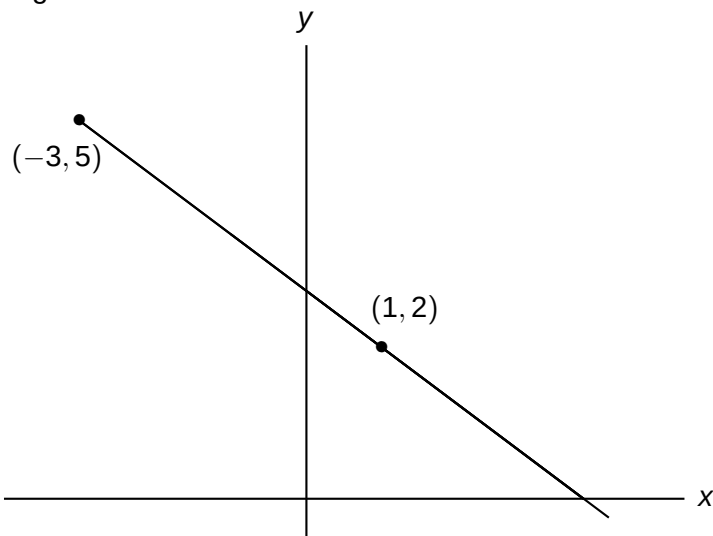
◆ Finalmente graficamos la recta obtenida



◆ Finalmente graficamos la recta obtenida



◆ Finalmente graficamos la recta obtenida



Ecuaciones Equivalentes para Definir Líneas Rectas

Dadas las propiedades que poseen los números reales, es posible escribir la ecuación canónica de una recta de otras formas equivalentes, como las siguientes:

◆ La Ecuación General de una recta es de la forma.

$$ax + by + c = 0$$

(6)

En efecto

$$ax + by + c = 0 \iff y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad (b \neq 0)$$

◆ La Ecuación Punto Pendiente, para $P = (x_0, y_0)$ y pendiente a_L es de la forma:

$$y - y_0 = a_L(x - x_0) \quad (7)$$

En efecto

$$y - y_0 = a_L(x - x_0) \iff y = a_Lx + (y_0 - a_Lx_0)$$

Intersección de dos líneas rectas

◆ Consideremos las rectas $L_1 : y = a_1x + b_1$ y $L_2 : y = a_2x + b_2$ entonces

$$\begin{aligned} P \in (L_1 \cap L_2) &\iff P \in \mathbb{R}^2 \wedge [P \in L_1 \wedge P \in L_2] \\ &\iff P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \wedge [y_0 = a_1x_0 + b_1 \wedge y_0 = a_2x_0 + b_2] \\ &\iff P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \wedge (a_1x_0 + b_1 = a_2x_0 + b_2) \\ &\iff P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \wedge (a_1 - a_2)x_0 = b_2 - b_1 \end{aligned}$$

Punto de intersección

La condición necesaria y suficiente para que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ es que $a_1 \neq a_2$, es decir que las rectas tengan distinta pendiente, y en tal caso,

$$x_0 = \left(\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \right) \Rightarrow y_0 = a_1 \left(\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} \right) + b_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 - a_2}$$

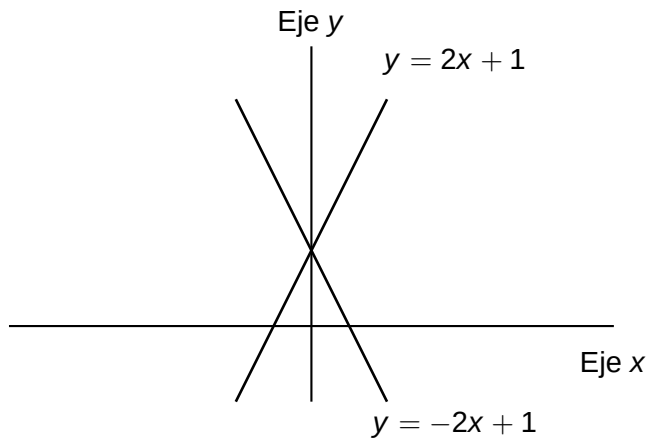
Así que

$$L_1 \cap L_2 = \left(\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}, \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 - a_2} \right)$$

(8)

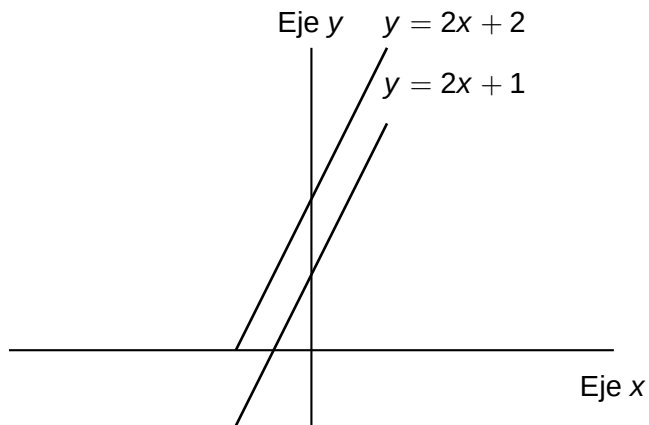
Ejemplo 1

Si consideramos las recta $L : y = 2x + 1$ y $L' : y = -2x + 1$ entonces sus gráficos son de la forma:



Ejemplo 2

Si consideramos las recta $L : y = 2x + 1$ y $L' : y = 2x + 2$ entonces sus gráficos son de la forma:



Rectas Paralelas

Definición

Si $L : y = a_L x + b_L$ y $L' : y = a_{L'} x + b_{L'}$ son dos rectas. Diremos que L es paralela a L' en símbolos $L \parallel L'$. Si $a_L = a_{L'}$

Ejemplo

Determinemos la ecuación de la recta L que pasa por el punto P , que es la intersección de las rectas $L' : y = 3x - 1$ y $L'' : y = -x + 5$, y que es paralela a la recta L''' que pasa por los puntos $Q = (1, 1)$ y $R = (-4, -1)$

Algoritmo de Trabajo

- ♦ Sea $L : y = ax + b$ la ecuación canónica de la recta pedida
- ♦ Gestión de la información
 - En primer lugar, si $P = (x_0, y_0)$ entonces

$$\begin{aligned}P \in L' \cap L'' &\iff P \in L' \wedge P \in L'' \iff y_0 = 3x_0 - 1 \wedge y_0 = -x_0 + 5 \\&\implies 3x_0 - 1 = -x_0 + 5 \implies 4x_0 = 6 \\&\implies x_0 = \frac{3}{2} \text{ e } y_0 = \frac{7}{2} \implies P = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)\end{aligned}$$

- Retornando a la ecuación canónica, tenemos que

$$P \in L \iff \frac{7}{2} = \frac{3}{2}a + b \quad (*)$$

- En segundo lugar, si $L''' : y = cx + d$ entonces

$$\left. \begin{array}{l} Q \in L''' \iff 1 = c + d \\ R \in L''' \iff -1 = -4c + d \end{array} \right\} \implies \boxed{\begin{array}{rcl} c & + & d = 1 \\ -4c & + & d = -1 \end{array}}$$

$$\implies 5c = 2$$

$$\implies c = \frac{2}{5} \wedge d = \frac{3}{5}$$

Así que,

$$L''' : y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$$

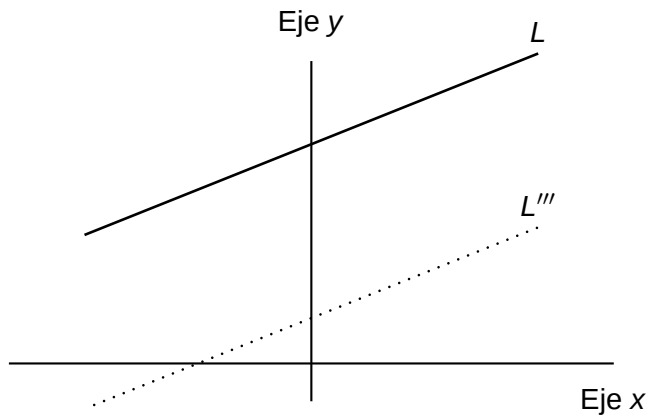
◆ Finalmente, por definición

$$L \parallel L''' \iff a = \frac{2}{5}$$

Y, sustituyendo en (*) tenemos que $b = \frac{29}{10}$ de forma que la recta pedida es

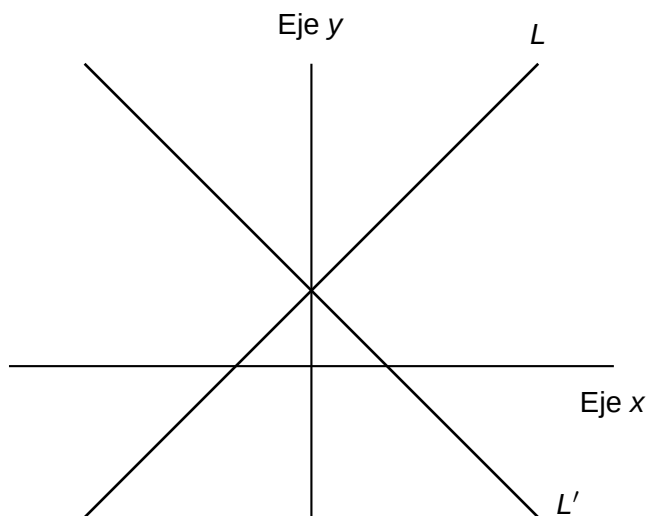
$$L : y = \frac{2}{5}x + \frac{29}{10}$$

♦ El gráfico de la recta L es:



Rectas Perpendiculares

Si graficamos las rectas $L : y = x + 1$ y $L' : y = -x + 1$ obtenemos la figura



Observación 1

◆ Sabemos que en este caso,

$$I = (x_0, y_0) \in L \cap L' \iff x_0 + 1 = -x_0 + 1 \iff x_0 = 0$$

Sustituyendo en cualquiera de la ecuaciones de las rectas, obtenemos que $y_0 = 1$. Por tanto, el punto de intersección es $I = (0, 1)$, es decir

$$L \cap L' = \{(0, 1)\} \quad (9)$$

- ◆ Si consideramos $P_L \in L$ y $P_{L'} \in L'$ tal que $P_L = (x, x + 1)$ y $P_{L'} = (x, 1 - x)$ entonces las distancias entre los puntos I , P_L y $P_{L'}$ son las siguientes:

$$d(P_L, P_{L'}) = \sqrt{(x - x)^2 + (x + 1 - 1 + x)^2} = \sqrt{(2x)^2}$$

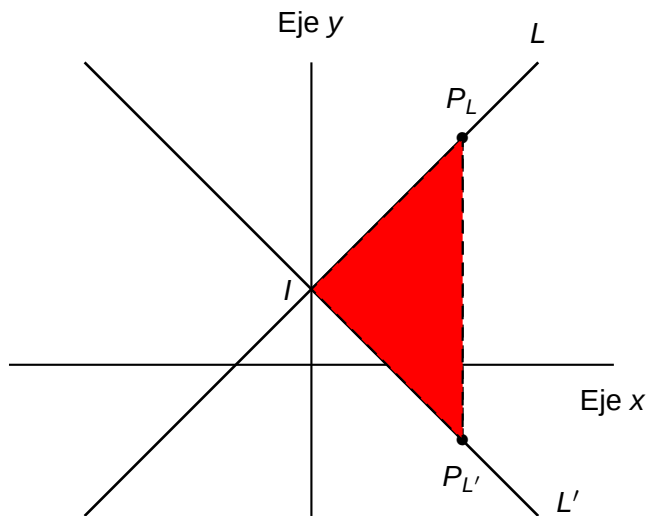
$$d(P_L, I) = \sqrt{(x - 0)^2 + (x + 1 - 1)^2} = \sqrt{2x^2}$$

$$d(I, P_{L'}) = \sqrt{(x - 0)^2 + (1 - x - 1)^2} = \sqrt{2(-x)^2}$$

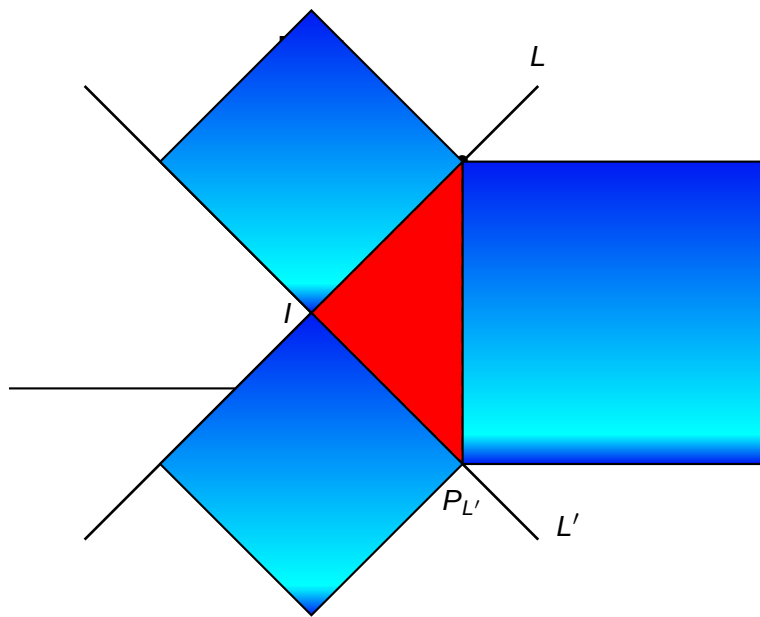
Es decir, tenemos la relación:

$$(d(P_L, P_{L'}))^2 = (d(P_L, I))^2 + (d(I, P_{L'}))^2 \quad (10)$$

Situación geométrica 1



Situación geométrica 2



Observación 2

- ♦ La elección de los puntos ha sido un caso particular, pues $P_L = (x, x + 1)$ y $P_{L'} = (x, 1 - x)$, ambos poseen la misma abscisa, (la misma x).
- ♦ Supongamos, "en forma un poco más general " que $P \in L$ y $Q \in L'$ son dos punto arbitrarios de dichas rectas entonces

$$\begin{aligned}P \in L &\iff P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \wedge y_1 = x_1 + 1 \\Q \in L' &\iff Q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \wedge y_2 = -x_2 + 1\end{aligned}$$

◆ Haciendo los mismos cálculos que en (10) obtenemos que:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x - 2)^2 + (x_1 + x_2^2)} = \sqrt{4(x_1^2 + x_2^2)}$$

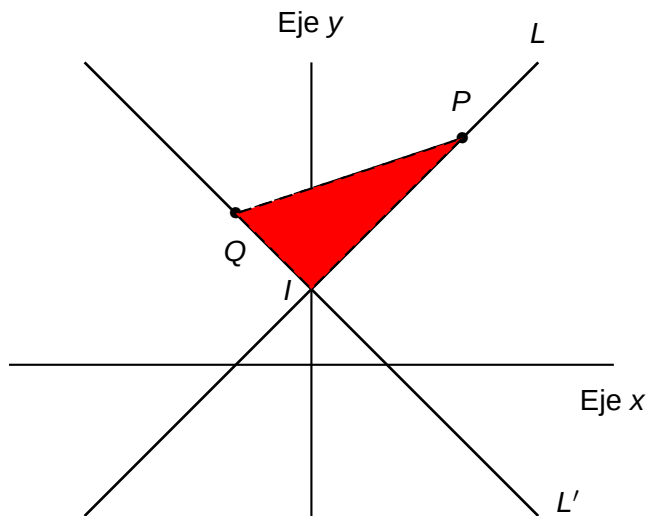
$$d(P, I) = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_1 + 1 - 1)^2} = \sqrt{2x_1^2}$$

$$d(Q, I) = \sqrt{(x_2 - 0)^2 + (1 - x_2 - 1)^2} = \sqrt{2x_2^2}$$

$\Downarrow$

$$(d(P, Q))^2 = (d(P, I))^2 + (d(Q, I))^2$$

Situación geométrica



Rectas Perpendiculares

Idea 1

Consideremos la siguiente situación:

- ◆ Dadas las rectas $L_1 : y = a_1x$, $L_2 : y = a_2x$ tal que $a_1 \neq a_2$
- ◆ $L_1 \cap L_2 = \{(0, 0)\}$
- ◆ Dados los puntos $P = (x_1, a_1x_1) \in L$ y $Q = (x_2, a_2x_2) \in L'$

Rectas Perpendiculares

Consecuencias

♦ Si $(d(P, Q))^2 = (d(P, (0, 0)))^2 + (d(Q, (0, 0)))^2$ entonces

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 + (a_1x_1 - a_2x_2)^2 &= x_1^2 + a_1^2x_1^2 + x_2^2 + a_2^2x_2^2 \\ &\Downarrow \\ x_1^2 + a_1^2x_1^2 + x_2^2 + a_2^2x_2^2 - 2(1 + a_1a_2) &= x_1^2 + a_1^2x_1^2 + x_2^2 + a_2^2x_2^2 \\ &\Downarrow \\ -2(1 + a_1a_2) &= 0 \\ &\Downarrow \\ a_1a_2 &= -1\end{aligned}$$

Rectas Perpendiculares

Recíprocamente

◆ Si $a_1 a_2 = -1$ entonces

$$\begin{aligned}(d(P, Q))^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (a_1 x_1 - a_2 x_2)^2 \\&= x_1^2 + a_1^2 x_1^2 + x_2^2 + a_2^2 x_2^2 - 2(1 + a_1 a_2) \\&= x_1^2 + a_1^2 x_1^2 + x_2^2 + a_2^2 x_2^2 \\&= (d(P, (0, 0)))^2 + (d(Q, (0, 0)))^2\end{aligned}$$

Conclusión: Caso intersección en el origen

Conclusión: Caso intersección en el origen

Si

Conclusión: Caso intersección en el origen

Si

♦ $L_1 : y = a_1x, L_2 : y = a_2x$ tal que $a_1 \neq a_2$

Conclusión: Caso intersección en el origen

Si

- ◆ $L_1 : y = a_1x, L_2 : y = a_2x$ tal que $a_1 \neq a_2$
- ◆ $L_1 \cap L_2 = \{(0,0)\}$, y

Conclusión: Caso intersección en el origen

Si

- ◆ $L_1 : y = a_1x, L_2 : y = a_2x$ tal que $a_1 \neq a_2$
- ◆ $L_1 \cap L_2 = \{(0,0)\}$, y
- ◆ $P = (x_1, a_1x_1) \in L$ y $Q = (x_2, a_2x_2) \in L'$

Conclusión: Caso intersección en el origen

Si

- ◆ $L_1 : y = a_1x, L_2 : y = a_2x$ tal que $a_1 \neq a_2$
- ◆ $L_1 \cap L_2 = \{(0,0)\}$, y
- ◆ $P = (x_1, a_1x_1) \in L$ y $Q = (x_2, a_2x_2) \in L'$

Entonces

Conclusión: Caso intersección en el origen

Si

- ♦ $L_1 : y = a_1x, L_2 : y = a_2x$ tal que $a_1 \neq a_2$
- ♦ $L_1 \cap L_2 = \{(0,0)\}, y$
- ♦ $P = (x_1, a_1x_1) \in L$ y $Q = (x_2, a_2x_2) \in L'$

Entonces

$$(d(P, Q))^2 = (d(P, (0,0)))^2 + (d(Q, (0,0)))^2 \iff a_1 \cdot a_2 = -1$$

Traslación del Origen

Reducción al caso intersección en el origen

Dadas las rectas $L_1 : y = a_1x + b_1$, $L_2 : y = a_2x + b_2$, y $a_1 \neq a_2$.

Supongamos que $L_1 \cap L_2 = \{(x_0, y_0)\}$, (ver (8)). Si llamamos $P_0 = (x_0, y_0)$ entonces

$$y_0 = a_1x_0 + b_1 \iff b_1 = y_0 - a_1x_0$$

Así que,

$$y = a_1x + b_1 \iff y = a_1x + y_0 - a_1x_0 \iff y - y_0 = a_1(x - x_0)$$

Por tanto, si hacemos el cambio de variable:

$$\left. \begin{array}{l} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{array} \right\} \text{ obtenemos } \begin{cases} L_1 : Y = a_1X \\ L_2 : Y = a_2X \end{cases}$$

Ejemplo

Dadas las rectas $L_1 : y = 2x - 1$, $L_2 : y = -\frac{1}{2}x + 3$ entonces

♦ $L_1 \cap L_2 = \{(1.6, 2.2)\}$, (ver (8))

♦ Si hacemos el cambio de variable:

$$\left. \begin{array}{l} X = x - 1.6 \\ Y = y - 2.2 \end{array} \right\} \text{ obtenemos } \begin{cases} L_1 : Y = 2X \\ L_2 : Y = -\frac{1}{2}X \end{cases}$$

Situación geométrica

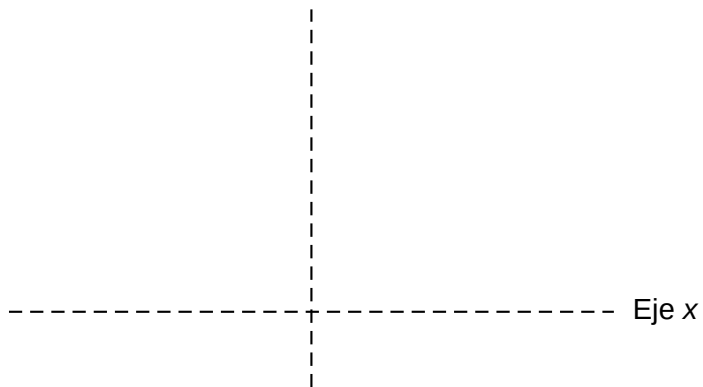
Situación geométrica



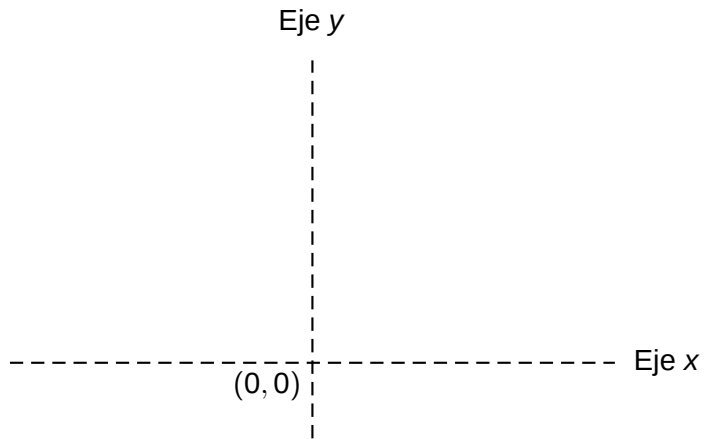
Situación geométrica

----- Eje x

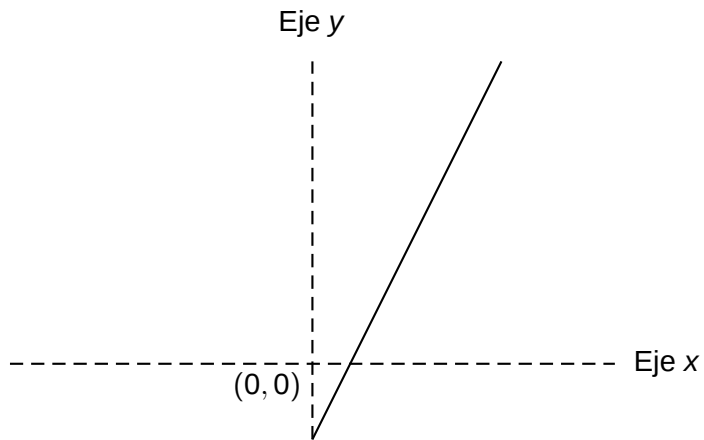
Situación geométrica



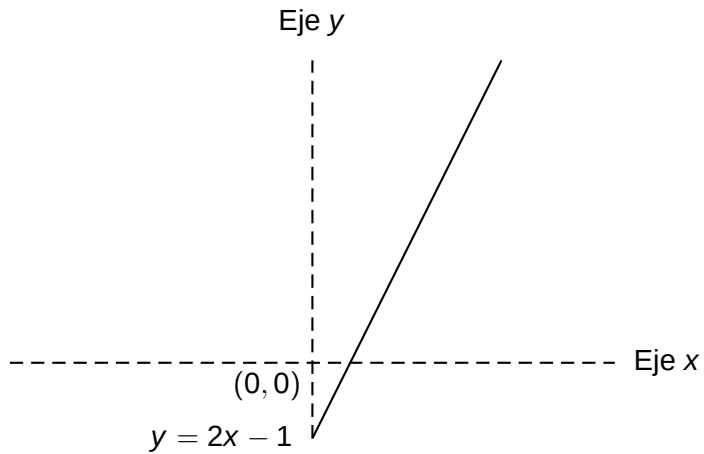
Situación geométrica



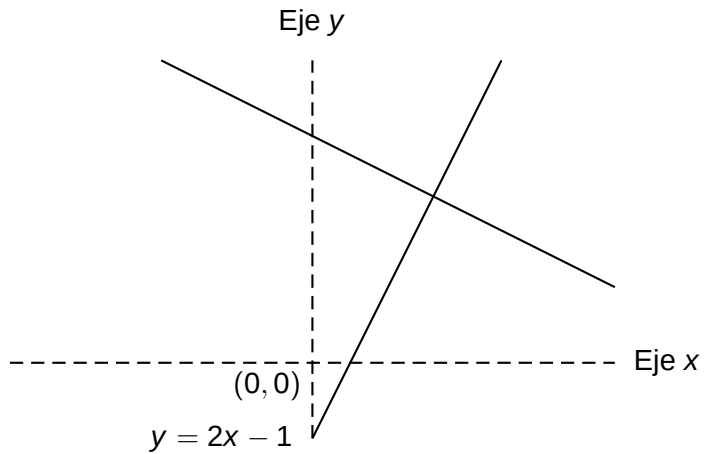
Situación geométrica



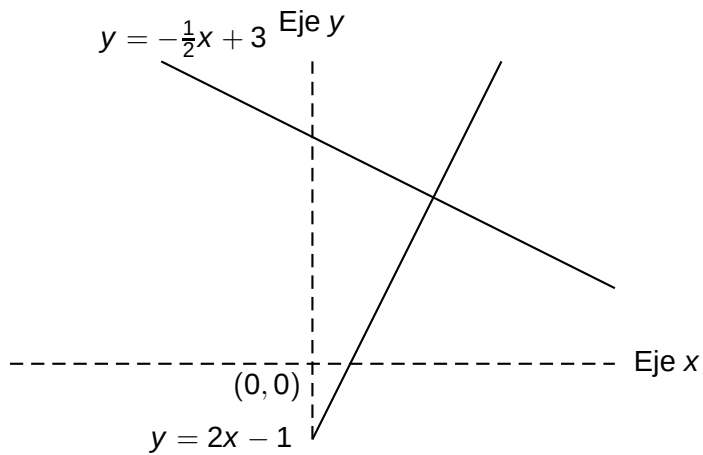
Situación geométrica



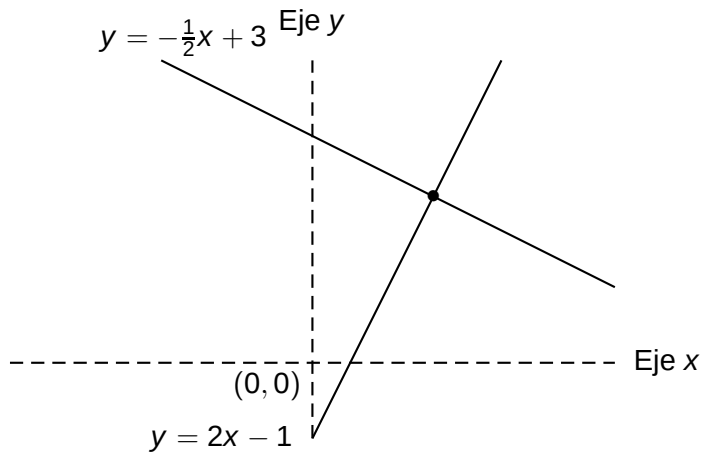
Situación geométrica



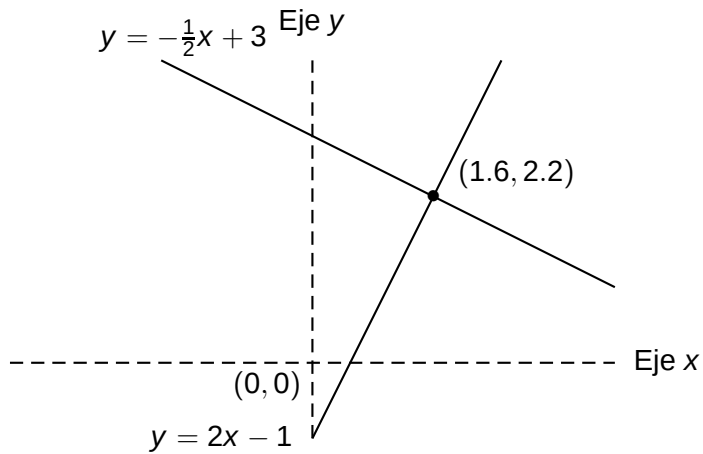
Situación geométrica



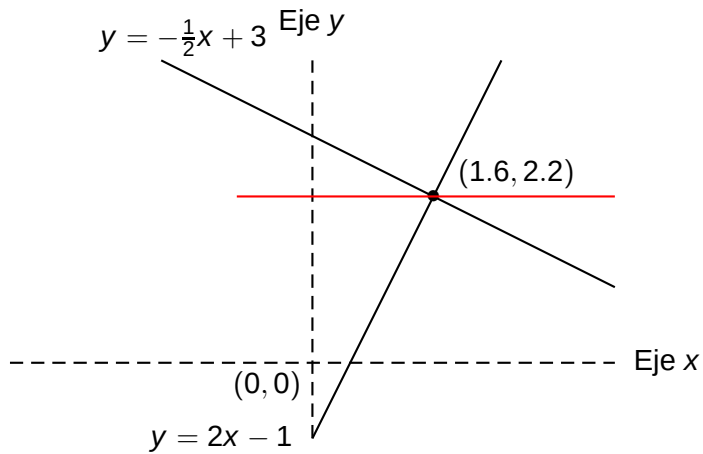
Situación geométrica



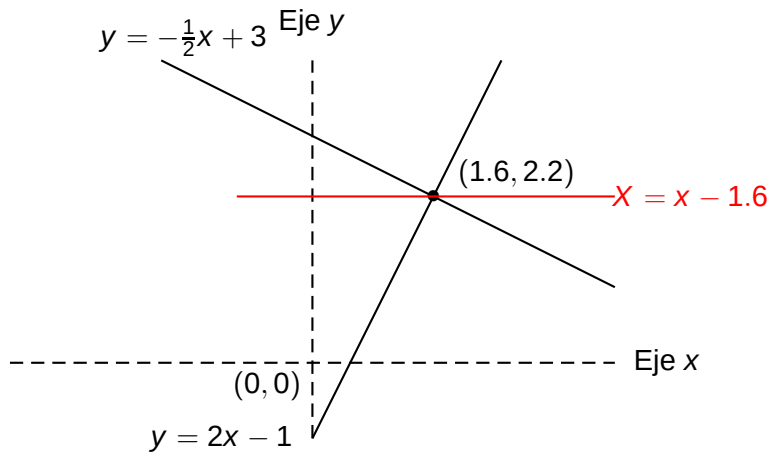
Situación geométrica



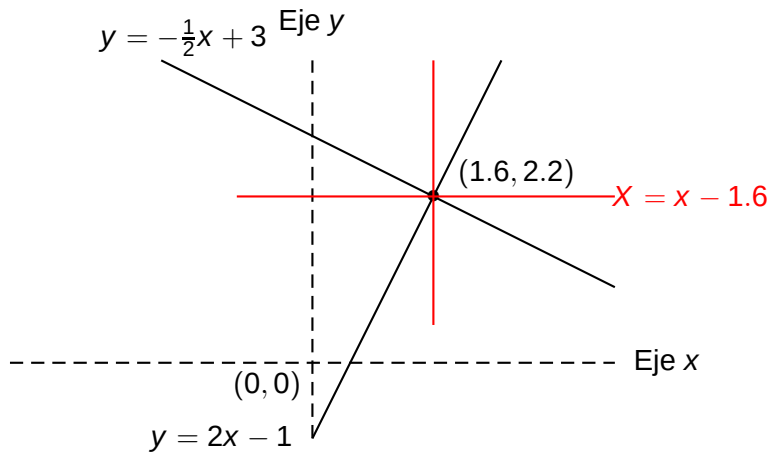
Situación geométrica



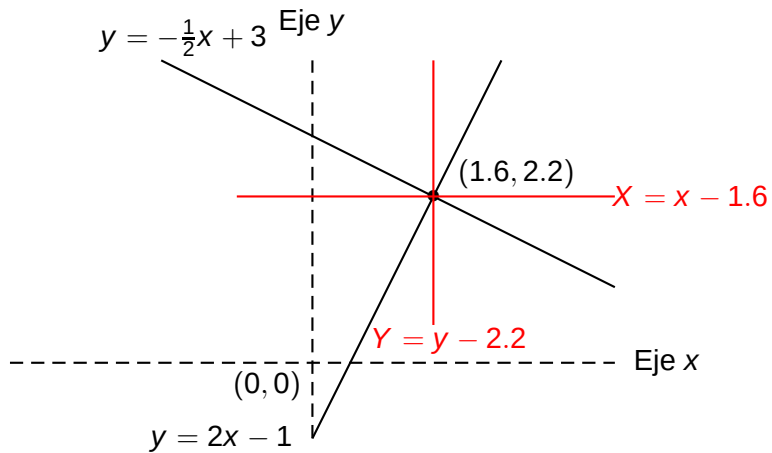
Situación geométrica



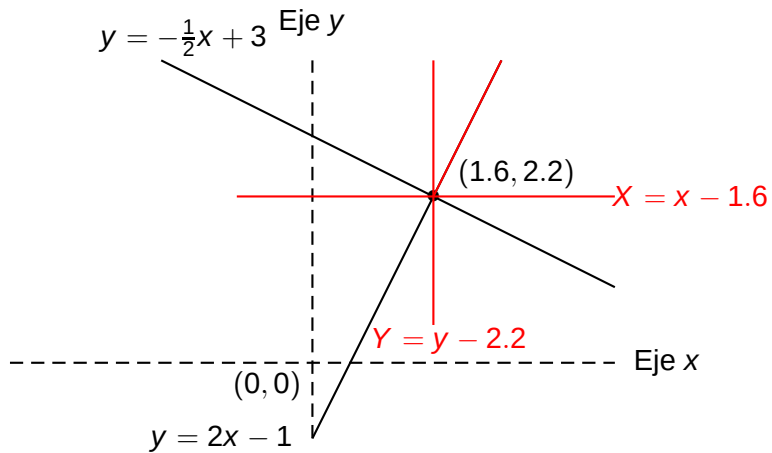
Situación geométrica



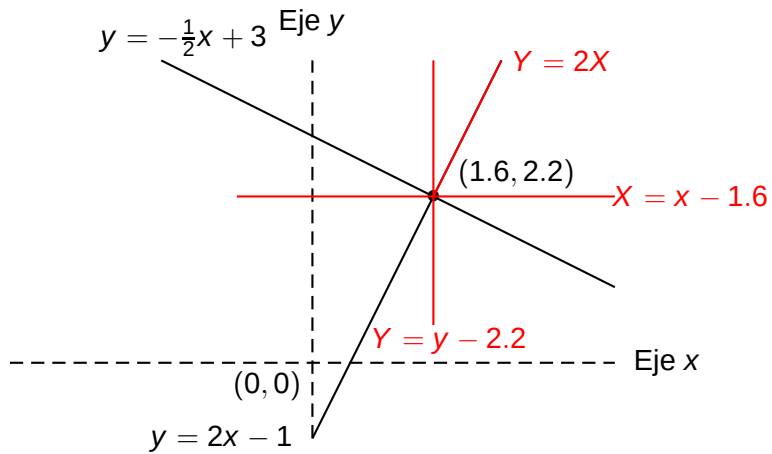
Situación geométrica



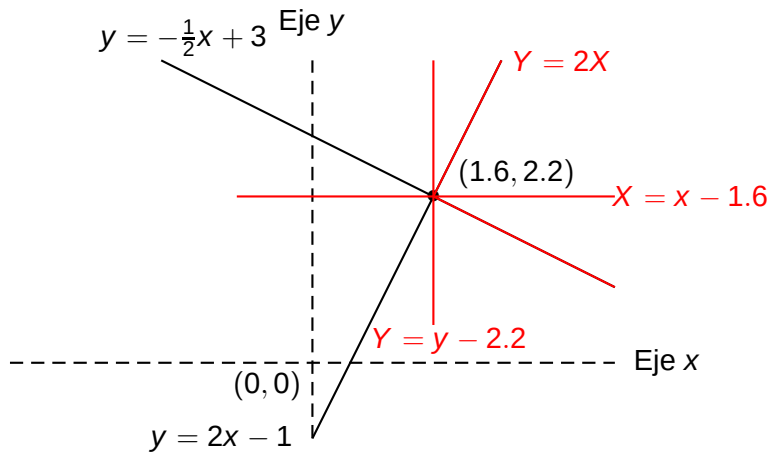
Situación geométrica



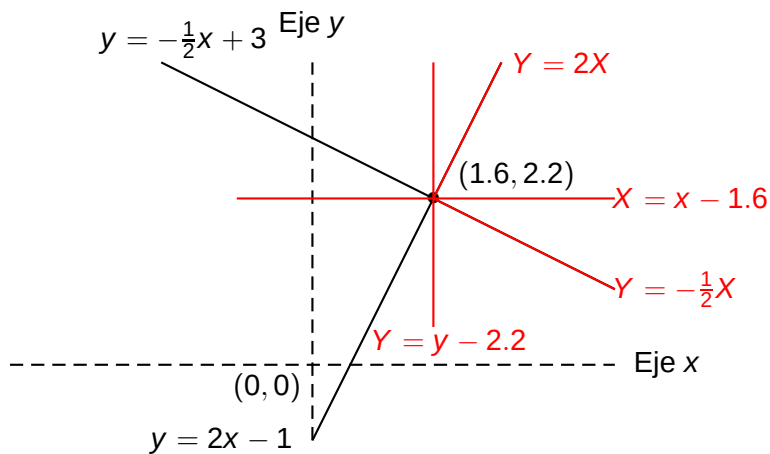
Situación geométrica



Situación geométrica



Situación geométrica



Definición

Rectas Perpendiculares

Dadas las rectas $L_1 : y = a_1x + b_1$, $L_2 : y = a_2x + b_2$, y $a_1 \neq a_2$. Diremos que L_1 es perpendicular a L_2 si $a_1 \cdot a_2 = -1$, y notaremos $L_1 \perp L_2$

Ejemplo

Determinemos la ecuación de la recta L que pasa por $P = (2, 3)$ y es perpendicular a la recta $y = 2x - 4$.

Algoritmo de trabajo

- ◆ Sea $L : y = ax + b$ la recta pedida
- ◆ Gestión de la información
- Aplicando la identidad (5) obtenemos que:

$$(2, 3) \in L \iff 3 = 2a + b \quad (*)$$

- Si llamamos L' a la recta $y = 2x - 4$ entonces por definición tenemos que:

$$L \perp L' \iff a \cdot 2 = -1 \iff a = -\frac{1}{2}$$

- Finalmente sustituyendo en $(*)$ tenemos que $b = 4$ y entonces la recta pedida L es:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Situación Geométrica

